高等学校教学用書

積　　分　　学

H. H. 魯金 著
譚家岱　張理京譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立“苏維埃科学”出版社(Государственное издательство “Советская наука”)出版的魯金(Н. Н. Лузин)著“積分学”(Интегральное исчисление)1953年版譯出。原書經苏联高等教育部批准为高等学校教科書。

積　　分　　学

Н. Н. 魯 金 著

譚家岱　張理京譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海集成印制厂印刷　新華書店總經售

書號 13010·229　開本 850×1168 1/32　印張 12 14/16　字數 340,000

一九五四年七月上冊初版(共印 67,000)

一九五四年七月下冊初版(共印 54,000)

一九五六年十一月合訂本第一版

一九五六年十二月上海第二次印刷

印數 15,001—33,000　　定價(8) ¥ 1.50

目 次

第一章 積分法.直接積分的各種法則

§1. 積分法

讀者早已熟知:數學的運算常常是一對一對出現的,每一對是由兩個彼此相反的運算組成的。例如,加法和減法(+,−)、乘法和除法(×,÷)、連乘 n 次以及開 n 次方[$(\ \ )^n$, $\sqrt[n]{\ \ }$]等。

此外,讀者尚知道:函數結構的符號也可以當作是一種運算,這種運算也是成雙的:有正函數與反函數。如果已給的函數記爲 $f(x)$,那麼爲了求 f 的反函數結構 φ,應在等式 $y=f(x)$ 中將字母 y 及 x 的位置互換,得 $x=f(y)$,然後再解所得方程中的 y,得 $y=\varphi(x)$。函數結構 φ 是跟 f 相反的。例如下面右邊一行中的函數是另一行中函數的反函數:

$$\begin{array}{ll} x^2+1, & \pm\sqrt{x-1}, \\ a^x, & \lg_a x, \\ \sin x, & \arcsin x。\end{array}$$

這裏,我們要注意一件事,正運算差不多總是單值的,而反運算就常常是多值的。這可以由上面右邊一行的函數看出來,其中第一個 $\pm\sqrt{x-1}$,同時有兩個數值;最末一個 $\arcsin x$,甚至同時具有無窮多的數值。

讀者還遇到過另外一對函數

$$f(x),\quad \Phi(x),$$

其中左邊的一個是原函數,右邊的是它的導函數(平常都簡稱導數——譯者)。這種情況,人們把它寫成一個等式

$$f'(x)=\Phi(x)。$$

微分學就是以下述正課題爲其基本課題的：

由給定的原函數 $f(x)$，導出它的導數 $\Phi(x)$ 來。

這個課題，可以用符號表示爲：

$$f(x)\to\Phi(x)。$$

微分學，利用它的基本運算——微分法（求導數的方法），來解決這個課題。

積分學則是以下述逆課題爲其基本課題的：

按給定的導數 $\Phi(x)$，找出它的原函數 $f(x)$ 來。

這個課題可以用符號表示爲：

$$f(x)\leftarrow\Phi(x)。$$

積分學利用它的基本運算——積分法，來解決這個課題。已知導數 $\Phi(x)$，求其原函數的運算，稱爲積分法。因此，就廣義而言：

積分運算是反微分運算。

求原函數的運算既然叫做積分法，從所給導數 $\Phi(x)$ 求得的每一個原函數 $f(x)$，就叫做函數 $\Phi(x)$ 的（個別的）積分。

§2. 積分運算的多值性：附加的任意常量．不定積分

微分法是一個單值的正運算，因爲連續函數 $f(x)$ 不可能具有兩個不同的導數 $\Phi(x)$。積分法則是一個反運算，像大多數反運算一樣，它是一個多值的運算：對於給定的導數 $\Phi(x)$，它給出的不只一個結果 $f(x)$，而有無窮多個結果。

爲了證明這點，首先記住：常量的導數是零，我們證明一個基本的預備定理。

預備定理 假若連續函數在某個線段上具有恆等於零的導數，則這個函數在該線段上是一個常量。

證明 設函數 $F(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是連續的，並設在該線段上每一點 x 處 $F'(x)=0$。假若函數 $F(x)$ 在該線段上不是一個常量，則

在該線段上存在這樣兩個點 x_1 及 x_2，$x_1<x_2$，在這兩點，函數 $F(x)$ 的數值 $F(x_1)$ 及 $F(x_2)$ 一定不相等：$F(x_1)\neq F(x_2)$。

另一方面，對於線段 $[x_1, x_2]$，引用拉格蘭日的中值定值，我們可得：

$$F(x_2)-F(x_1)=(x_2-x_1)\cdot F'(\xi),$$

式中 ξ 爲介於 x_1 及 x_2 中間的一個數，$x_1<\xi<x_2$。因爲 ξ 是線段 $[a,b]$ 的一個點，所以我們應有 $F'(\xi)=0$。由此，前面的等式給出了 $F(x_2)-F(x_1)=0$，這是和不等式 $F(x_1)\neq F(x_2)$ 相矛盾的。

由此可知：$F(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是一個常量。

現在我們可以證明下面的定理了：

正定理　假若兩個函數相差一個常量，則它們具有同一導數。

證明　因爲，假若 $f^*(x)-f(x)=C$，式中 C 爲常量，又 $f(x)$ 是可微分的，則 $f^*(x)=f(x)+C$，因此就有

$$\frac{df^*(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}=\frac{df(x)}{dx}。$$

逆定理　假若兩個函數具有同一導數，則它們之差爲一常量。

證明　因爲，假若 $\frac{df^*(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$，則

$$\frac{d[f^*(x)-f(x)]}{dx}=\frac{df^*(x)}{dx}-\frac{df(x)}{dx}=0。$$

因此，按上面證明了的基本預備定理，我們有：

$$f^*(x)-f(x)=C,$$

其中 C 是一個常量。

由上面這些證明了的定理，立即得出積分運算的多值性。

因爲，假若對於給定的導數 $\Phi(x)$，我們找到了它的任何一個個別的原函數 $f(x)$，那麼：

第一，每一個表達式 $f(x)+C$，其中 C 爲任意取好的常量，都是這個導數 $\Phi(x)$ 的原函數，因爲函數 $f(x)$ 與 $f(x)+C$ 之差爲一常量（正

定理);

第二,導數 $\Phi(x)$ 的每一個原函數 $f^*(x)$,不論是哪一個,毫無例外,都可以表達爲 $f(x)+C$ 的形式,其中 C 是一個常量;因爲,兩個原函數 $f^*(x)$ 及 $f(x)$,具有同一導數 $\Phi(x)$,從而 $f^*(x)-f(x)=C$,其中 C 爲一常量(逆定理)。因此 $f^*(x)=f(x)+C$。

這樣。

假若 $f(x)$ 是所給導數 $\Phi(x)$ 的任一個個別的原函數,那麼,$\Phi(x)$ 的所有的原函數的全體,包括在表達式 $f(x)+C$ 中,其中 C 是任意常量。

前面,我們把導數 $\Phi(x)$ 的任一個求得的原函數 $f(x)$,稱爲函數 $\Phi(x)$ 的(個別的)積分。

一般表達式 $f(x)+C$(式中 C 爲任意常量),稱爲函數 $\Phi(x)$ 的不定積分。這個表達式中的首項 $f(x)$,稱爲不定積分的函數項。第二項 C,稱爲積分常量。這個常量與 x(稱爲積分變量)無關,它的數值是可以任意選擇的;因此我們稱它爲附加的任意常量,或不定積分的任意常量。

例 因 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$,函數 $\frac{x^4}{4}$ 便是 x^3 的原函數。所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一個個別積分。x^3 的個別積分也可以是 $\frac{x^4}{4}+2$,$\frac{x^4}{4}-7$ 等等。表達式 $\frac{x^4}{4}+C$(式中 C 爲任意常量),是 x^3 的不定積分。首項 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的不定積分的函數項。第二項 C 是積分常量,它的數值可以任意選取。

如果我們要自某所給導數 $\Phi(x)$ 的所有的原函數中,尋找某個原函數,使他具有某預先規定的性質,那麼我們就用得着積分常量的任意性了。

例如在實用上,常要解下面的問題:

要選擇積分常量的數值,使我們得到一個原函數,它在指定的 x_0 處取得預先規定的數值 y_0。

解 設 $\Phi(x)$ 是所給的導函數，$f(x)+C$ 是 $\Phi(x)$ 的不定積分。常量 C 的數值應當選擇得，使原函數 $f(x)+C$ 在 $x=x_0$ 時等於 y_0。就是說，我們應有 $f(x_0)+C=y_0$。由這個方程決定 C，我們求得 $C=-f(x_0)+y_0$。由此而知，所找尋的原函數是

$$f(x)-f(x_0)+y_0.$$

例 求 x^3 的原函數，使它在 $x=2$ 點的數值為 17。

解 x^3 的不定積分為 $\frac{x^4}{4}+C$。現在要取 C 的數值，使原函數 $\frac{x^4}{4}+C$ 在 $x=2$ 時等於 17。這就是說，我們應有等式

$$\frac{2^4}{4}+C=17 \text{ 或 } 4+C=17,$$

由此知，$C=13$。當 $x=2$ 時，原函數 $\frac{x^4}{4}+13$ 的確具有數值 17。

讀者應該注意，這種問題的解，是唯一的，完全確定了的，因為在函數 $\Phi(x)$ 的所有原函數 $f^*(x)$ 中，有一個也只有一個原函數 $f(x)+C$ 在 x_0 點取得數值 y_0。這是因為，當我們解這個問題時，只得到給出這個原函數的常量 C 的一個數值，$C=-f(x_0)+y_0$。

§3. 定積分

雖然每一個所給導數 $\Phi(x)$，具有無窮多的原函數，但是這些原函數都具有下面的公共性質：

在任意一個給定的線段 $[a, b]$ 的兩個端點處，這些原函數所得到的增量，都彼此相等[⊖]。

證明 事實上，若 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上的兩個任意的原函數，則它們之差 $f_2(x)-f_1(x)$ 在這個線段上是一個常量。所以，在 $[a, b]$ 上，我們有等式 $f_2(x)-f_1(x)=C$，其中 C 為一常量。由此而得 $f_2(x)=f_1(x)+C$。隨之而有 $f_2(b)=f_1(b)+C$ 及 $f_2(a)=f_1(a)+C$。

⊖ 譯者註：這句話容易引起誤解，實際上著者想說的是：原函數在端點 b 的數值減去它在端點 a 的數值所得差，與原函數的選擇無關。

由第一個等式減去第二個等式，即得

$$f_2(b)-f_2(a)=f_1(b)-f_1(a)。$$

因此，當自變量 x 由數值 a 變到數值 b 時，$\Phi(x)$ 的一切原函數所得到的一切增量，彼此相等。證明完畢。

由此我們可以得到一個很重要的推論：

原函數的增量 $f(b)-f(a)$，是一個與原函數的選擇沒有關係的數量，它只依賴於導數 $\Phi(x)$ 的本性以及兩個數 a 和 b。

由於這個緣故，我們把增量 $f(b)-f(a)$ 直接記爲 I_a^b，而不指出原函數 $f(x)$（因爲這個增量與原函數的選擇完全沒有關係），並稱之爲函數 $\Phi(x)$ 在 a, b 限之間的**定積分**；同時，數 a 寫在下面，稱爲下限；數 b 寫在上面，稱爲上限。

不要忘記，在討論中我們假定了函數 $\Phi(x)$ 在線段 $[a,b]$ 上是連續的；隨之，它的曲線在這個線段之上沒有任何間斷及跑到無窮遠等等反常現象。

例 試計算下上限 1 與 5 之間函數 x^3 的定積分。

解 函數 x^3 的不定積分是 $\frac{x^4}{4}+C$。任意取 x^3 的一個原函數，例如取 $\frac{x^4}{4}$。可得 $I_1^5=$ $=\frac{5^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{625}{4}-\frac{1}{4}=\frac{624}{4}=156$。所以，函數 x^3 的定積分 I_1^5 是 156。

當我們已經給好了在線段 $[A, B]$ 上連續的導數 $\Phi(x)$ 時，又當 a 及 b 是該線段的兩個任意指定的點時，那麽定積分 I_a^b 只是一個數。假若下限 a 是常量，而上限 b 是變量，但 b 不超出 $[A, B]$ 範圍之外，則定積分 I_a^b 就變成其上限 b 的一個函數。我們應當搞清楚這個函數的性質。爲此目的，我們以 x 表示定積分 I_a^b 的上限 b，就是令 $b=x$，然後研究以變量 x 爲上限的定積分 I_a^x。

因爲按照定積分 I_a^b 的原義，我們有等式：

$$I_a^b=f(b)-f(a),$$

式中 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的任何一個原函數——是任意選擇的，所以在該等

式中令 $b=x$，即得

$$I_a^x=f(x)-f(a)。$$

因此，取這個等式兩邊對 x 的導數，即得

$$\frac{dI_a^x}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}=\Phi(x)-0=\Phi(x)。$$

因此，以變量 x 爲上限的定積分 I_a^x，是 $\Phi(x)$ 的一個原函數。當 $x=a$ 時，這個原函數等於零，因爲：

$$I_a^a=f(a)-f(a)=0。$$

由前面所述各點，即知：定積分 I_a^x，是 $\Phi(x)$ 的所有原函數中在 a 點等於零的一個唯一的原函數。

表達式

$$I_a^x+C,$$

(式中 C 是任意常量)，顯然是 $\Phi(x)$ 的不定積分；因爲當 C 變化時，它給出了 $\Phi(x)$ 的所有的原函數。

當 C 給定時，式子 I_a^x+C 給出了在 $x=a$ 點等於 C 的原函數。

§4. 關於計算定積分的、積分學的基本定理

在前節中我們看到，函數 $\Phi(x)$ 在上下限 a, b 之間的定積分 I_a^b 等於 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$ 的增量 $f(b)-f(a)$，因此它實際上與原函數沒有關係，而只依賴於導函數 $\Phi(x)$ 與上下限 a 及 b。可是，定積分 I_a^b 對於函數 $\Phi(x)$ 及數 a 與 b 的這個依賴關係，是非常隱蔽的，因此，積分學首先要指出：爲了求定積分

$$I_a^b=f(b)-f(a), \tag{1}$$

應對線段 $[a, b]$ 及該線段上的連續函數 $\Phi(x)$ 作什麼運算。

乍看起來，這樣直接從線段 $[a, b]$ 及函數 $\Phi(x)$ 求定積分 I_a^b 是很容易的，因爲這只要應用拉格蘭日的中值定理(第一册，§149)寫出下面的等式就行了：

$$f(b)-f(a)=(b-a)\Phi(\xi), \qquad (2.$$

式中 ξ 表示某個介於 a 和 b 之間的數(圖 1)。

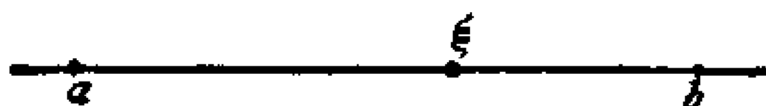


圖 1.

但是,爲了知道等式(2)右邊的數值,那我們應當知道中値 ξ 的準確位置。然而中値定理並沒有告訴我們這點,它只告訴我們 ξ 是在線段 $[a, b]$ 兩端之間的某一處而已。

爲了減輕 ξ 點在線段 $[a, b]$ 上的不定性,我們將這個線段分爲 n 個小線段,同時對於每一個這種小線段,都施用一次中値定理。照下面的方式來做。

首先,在這線段 $[a, b]$ 上畫一些分點。這些分點都預先取好,是已知的,共有 $n-1$ 個。由 a 到 b,依次用 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}$ 記它們。爲了使討論的形式一致起見,以 x_0 表示開頭的一點 a,以 x_n 表示末點 b。

這樣,最左邊的一個線段 $[a, x_1]$,稱爲初始線段;隨後的線段 $[x_1, x_2]$ 稱爲第一個;它後面的線段 $[x_2, x_3]$ 稱爲第二個;等等,依此類推。一般說來,線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 稱爲第 i 個線段;最後的一個線段 $[x_{n-1}, b]$ 稱爲第 $n-1$ 個線段(圖 2)。



圖 2.

假若,在線段 $[a, b]$ 上,由 a 點到 b 點,我們把 x_i 當作初值,x_{i+1} 當作新值,那麼,差 $x_{i+1}-x_i$ 就應當稱作橫坐標 x_i 的增量,並應以 Δx_i 記之;就是說,應寫下面的等式:

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i, \tag{3}$$

其中 i 可以是 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 中的任意一個數。另一方面，差 $x_{i+1}-x_i$ 顯然等於線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 的長；因此，Δx_0 是初始線段的長，Δx_1 是第一個線段的長，Δx_2 是第二個線段的長，等等，一直到最後一個線段，它的長是 Δx_{n-1}。

現在，中值定理給出了下面的許多等式：

對於初始線段：

$$f(x_1)-f(a)=(x_1-a)\Phi(\xi_0)=\Phi(\xi_0)\cdot\Delta x_0。$$

對於第一個線段：

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\Phi(\xi_1)=\Phi(\xi_1)\Delta x_1。$$

對於第二個線段：

$$f(x_3)-f(x_2)=(x_3-x_2)\Phi(\xi_2)=\Phi(\xi_2)\cdot\Delta x_2。$$

……………………………………………………………………

對於第 i 個線段：

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=(x_{i+1}-x_i)\Phi(\xi_i)=\Phi(\xi_i)\Delta x_i。$$

……………………………………………………………………

對於第 $n-1$ 個線段：

$$f(b)-f(x_{n-1})=(b-x_{n-1})\Phi(\xi_{n-1})=\Phi(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1},$$

式中 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_{n-1}$ 都是一些不知道的點，各位於初始，第一，第二，…，第 i，第 $n-1$ 個線段上。

把上面的等式都加起來，我們得到：

$$f(b)-f(a)=\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\Phi(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+\Phi(\xi_i)\Delta x_i+ +\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}。 \tag{4}$$

讀者應當看到，雖然這個等式是完全準確的，可是，就我們為計算未知量 $f(b)-f(a)$ 這個最終目的來說，它完全不適用；因為我們並不知道中值 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \xi_{n-1}$ 在其對應線段上的位置。我們只不過依據中值定理把這些中值寫了寫而已。

假若我們現在取仍然在各個線段之內的另外一些點 ξ_0^*, ξ_1^*, ξ_2^*, $\cdots$, ξ_i^*, $\cdots$, ξ_{n-1}^*, 來代替那些我們不知道的點 ξ_0, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_i, $\cdots$, ξ_{n-1} 那麼就沒有任何理由期待:形式類似的和:

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \qquad (5)$$

是恰好等於 $f(b)-f(a)$ 的。然而,我們可以計算這個新的和與 $f(b)-f(a)$ 究竟差多少。

事實上,寫出差式

$$[f(b)-f(a)]-[\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i+\cdots+ +\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}]。 \qquad (6)$$

後,我們看到,它可以從等式(4)的兩邊減去和式(5)而得到;就是說,這個差是等於下面的表達式的:

$$[\Phi(\xi_0)-\Phi(\xi_0^*)]\Delta x_0+\cdots+[\Phi(\xi_i)-\Phi(\xi_i^*)]\Delta x_i+\cdots+ +[\Phi(\xi_{n-1})-\Phi(\xi_{n-1}^*)]\Delta x_{n-1}。 \qquad (7)$$

為了要估計這個表達式的數值,我們注意:兩個點 ξ_i 及 ξ_i^* 都是在線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的。函數 $\Phi(x)$ 是假定在線段 $[a, b]$ 上連續的。這意味着,對每一個任意小的正數 ε, 恆存在這種正數 η, 使得,當不等式,

$$|\Phi(x'')-\Phi(x')|<\varepsilon, \qquad (I)$$

成立時,下面的不等式即成立:

$$|x''-x'|<\eta。 \qquad (II)$$

由此而知,假若 $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, b]$ 這些線段之中,最大的一個之長小於 η 的話,則對於每一個 i, 都有不等式

$$|\xi_i-\xi_i^*|<\eta, \qquad (II^*)$$

因此,就必然有對於一切 i 值都成立的不等式

$$|\Phi(\xi_i)-\Phi(\xi_i^*)|<\varepsilon, \qquad (I^*)$$

由不等式(I*)即知,表達式(7)的絕對值不能超過下面的和:

$$\varepsilon\Delta x_0+\varepsilon\Delta x_1+\cdots+\varepsilon\Delta x_i+\cdots+\varepsilon\Delta x_{n-1},$$

而這個和顯然等於 $\varepsilon(b-a)$。當 ε 的極限是零時,它是一個無窮小;這

表示了差式（6）必定是個無窮小量，由此而知：$f(b)-f(a)$ 是和式（5）的極限。

這樣，我們就得到了最重要的一個定理：

積分學的基本定理。設函數 $\Phi(x)$ 是在所給線段 $[a, b]$ 上連續的，具有原函數 $f(x)$。我們將該線段分爲 n 個小線段，其長各爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_{n-1}$，又在每一個小線段上任取一點：$\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$。則當小線段的數目無限增加，而且每一個小線段的長都趨近於零的時候，差 $f(b)-f(a)$ 就是下面的和的極限：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}。\qquad (5)$$

從這個積分學基本定理，可推出下面的求定積分的一般法則。

爲了求線段 $[a, b]$ 上所給連續函數 $\Phi(x)$ 的定積分 I_a^b，我們應按下面幾個步驟來做。

第一步　把線段 $[a, b]$ 分爲 n 個小線段，其長各爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$（按從 a 到 b 的次序）。

第二步　在每一個小線段上，各任意選擇一點：$\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$。

第三步　對於每一個小線段 $[x_i, x_{i+1}]$，都做一個乘積 $\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i$，這就是所給函數 $\Phi(x)$ 在所取點 ξ_i^* 處的數值乘上該線段的長 Δx_i。把這 n 個乘積都加起來得：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}。\qquad (5)$$

第四步　當 n 無限增加，並且 Δx_i 中最長的一個趨近於零的時候，求這樣做成的 n 個乘積的和的極限。這個極限就是所要求的定積分 $I_a^b=f(b)-f(a)$。

§5. 積分學的基本運算的特徵、定積分與不定積分的記號。

我們都知道，一般微分法則（第一册§60）分爲四個步驟；其中前三個步驟的目的，只在於建立 Δx 爲有限時的表達式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 只有第四個步

驟才是決定的步驟；因爲在這個步驟裏是要來求：當 Δx 趨近於零時所作表達式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限。

可是，一般法則中一點也沒有指出來：我們實際上應當怎麼樣去求這個極限。這之所以不能指出是完全可以瞭解的，因爲在一般情形下是不可能指出什麼來的。所以，在後來講微分學時，我們用 20 個法則（列在第一册 §62 及 §95 的兩個表中）來代替那單獨的一般微分法則。這二十個法則比一般微分法則要狹窄得多，它們並不能使我們把任意一個具有導數的函數 $f(x)$ 微分出來；但是它們却概括了實用上遇到的許許多多情形，而且最重要的是：它們每次都是能把微分法做到底的；而一般微分法則的第四個步驟是不可能做到這樣的，實際上，它只是個沒法着手的運算，亦即不好計算的計算。

積分學中也是這樣。積分學的基本運算就在於求定積分，而這個運算也分爲四個步驟；其中前三個步驟的目的，在於建立和式 $\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$，而在決定性的第四個步驟裏，我們要求：當所有的 Δx_i 趨近於零時，這個和的極限。

這樣，微分學求兩個無窮小比值的極限，而積分學則要求個數無限增加的無窮小之和的極限。而求這個和的極限，更加是沒法着手的運算，更加是不好計算的計算。但是在自然科學（物理，化學）力學與幾何中，却常常要求這種和的極限，所以積分學中採取繞圈子的辦法來算：利用套公式的、常常是代數的方法，直接求出所給導數 $\Phi(x)$ 的原函數 $f(x)$；原函數求到手之後，作 $f(b)-f(a)$ 之差，立即可得定積分 I_a^b 的準確數值，像我們講過的，這個定積分就是自然科學中很有用的無窮小之和的極限。

積分學的這個代數辦法，只有當我們建立定積分與不定積分的適當記號後，才有可能。

爲此，首先因爲下面的和：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \qquad (5)$$

太長了,我們把它縮寫為:

$$\mathop{S}_{i=0}^{i=n-1}\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i,$$

開頭寫拉丁字母 S, 作為求和的運算記號(拉丁字"和"是 summa), 求和記號 S 之後就寫出所謂"一般項", 亦即其第 i 項。當 i 的數值為 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 時, 這個一般項就變成初始項、第一項、第二項、…等等,一直到第 $n-1$ 項。

其次,因 ξ_i^* 是線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任意選擇的一點,所以我們可以取它為左端點,亦即令 $\xi_i^*=x_i$。因此,和式(5)可寫為

$$\mathop{S}_{i=0}^{i=n-1}\Phi(x_i)\Delta x_i。$$

往下,把求和記號 S 的上下標 i 直接用 x_i 的初值(即字母 a)及 x_i 的最後值(即字母 b❶)來代替。這樣改了之後,和式(5)可寫為

$$\mathop{S}_a^b\Phi(x_i)\Delta x_i。$$

再索性去掉橫坐標 x 的不必需的指標 i, 和式(5)便可以寫為

$$\mathop{S}_a^b\Phi(x)\Delta x。$$

最後,記住: 自變量的增量 Δx 和微分 dx, 是同一個東西, 因為 $\Delta x=dx$, 乃得和式(5)的最終形式:

$$\mathop{S}_a^b\Phi(x)dx。 \qquad (5^*)$$

但是讀者應當牢記,在公式(5^*)中,講的是含有限項的真正和。式子開頭的字母 S (summa) 也說明着這點。看一看公式(5^*),讀者不僅

❶ 嚴格說來,橫坐標最後的數值不是 b, 而是 x_{n-1}。但是,它與 b 相差無窮小;而把一無窮小項 $\Phi(b)\Delta b$ 加上去,是不會改變這個和的極限的。

會縮寫，而且能夠把這個和完全寫出來：只要把線段 $[a, b]$ 分爲有限個小線段 $[x_i, x_{i+1}]$，將每個小線段之長 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 去乘連續函數 $\Phi(x)$ 在該線段左端點 x_i 的數值，然後再把這些乘積 $\Phi(x_i)\Delta x_i$ 加起來，這就是和式（5）展開之後的全部形式，其縮寫形式卽爲公式(5^*)。

我們發現很可以給和式(5^*)的極限定一個記號，使這個記號本身保留該極限來源的跡印，亦卽保留(5^*)式的跡印。爲此，我們仍然保留(5^*)式的外形，只不過把那個表示有限項之和的字母 S 寫成記號 $\int$，也就是把字母 S 拉得非常長。

因此，定積分 I_a^b 寫成下面的形式：

$$\int_a^b \Phi(x)dx, \tag{8}$$

讀爲："$\Phi(x)dx$ 從 a 到 b 的定積分"。

讀者應當注意，公式（8）並不表示什麼"和"了，它完全不是什麼"和"，甚至也不是許多無窮小加起來的和，而不過是這種和的極限吧了。我們不可把眞正的"和"與和的極限混淆起來。

這樣，我們只能寫：

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \lim \mathop{S}_a^b \Phi(x)dx \tag{9}$$

或者寫爲展開式：

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \lim[\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \cdots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}]。 \tag{10}$$

但另一方面，由於定積分 I_a^b 等於 $\Phi(x)$ 的任一個原函數 $f(x)$ 的數值之差 $f(b) - f(a)$，我們就得到積分學中的基本公式：

$$\int_a^b \Phi(x)dx = f(b) - f(a), \tag{11}$$

這裏，$\Phi(x) = f'(x)$。

下面是相應地求定積分的實用法則：

爲了計算定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$，不必取什麼極限，而只須照下面兩個步驟做：

第一步　求所給連續函數 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$。求這個原函數時，不用搞什麼極限，只要用套公式的方法，甚或用純代數的方法去求。

第二步　求得 $\Phi(x)$ 的原函數 $f(x)$ 後，作數值差 $f(b)-f(a)$。

這個差 $f(b)-f(a)$，就是 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 之和的極限。一般說來，我們並沒有別的方法來求這個極限。

關於定積分的記號 $\int_a^b \Phi(x)dx$，尙有一事要注意：稱爲積分下限與積分上限的數 a 與 b，只是變量 x 的變化範圍的界限。同時，這個變量 x 也不是眞的變量，實際上只是指標變量。有時也這樣稱呼它，但一般常稱它爲"積分變量"。積分變量並不是眞的變量，它只有一種輔助作用。例如，我們要把 1 到 100 的自然數都加起來時，我們不用把

$$1+2+3+\cdots+100=5050,$$

全部寫出來，而可以把它縮寫，把"一般項"寫在"和"的符號之後，

$$\underset{i=1}{\overset{i=100}{S}} i=5050。$$

這裏，i 是指標變量，而不是眞正變量，因爲最終結果 5050 與 i 全無關係。這指標變量只是求和步驟的變量，亦卽相加各項一個一個寫出時的變量，因此，它可以用別的字母例如 j 和 k 來代替，因爲下面的兩個結果都是 5050。

$$\underset{j=1}{\overset{j=100}{S}} j=5050, \quad \underset{k=1}{\overset{k=100}{S}} k=5050。$$

同樣，在取極限以前的和 $\underset{a}{\overset{b}{S}} \Phi(x)dx$ 也可以寫爲 $\underset{a}{\overset{b}{S}} \Phi(t)dt$ 或

$\overset{b}{\underset{a}{S}}\Phi(v)dv$ 的形式，而不致改變它的值。因此，定積分 $\int_a^b\Phi(x)dx$ 與下面兩個定積分

$$\int_a^b\Phi(t)dt \quad 或 \quad \int_a^b\Phi(v)dv。$$

具有同一個數值。

基本線段 $[a, b]$，稱爲定積分的區域，通常又(但不太正確)稱爲積分區間。

從和 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 的極限求定積分值 $\int_a^b\Phi(x)dx$ 的運算，稱爲積分法。因此，所謂"積分法"有雙重意義：第一，它表示從導數 $\Phi(x)$，或從微分 $\Phi(x)dx$ 求原函數；第二，它表示直接求上面講的和 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 的極限 $\int_a^b\Phi(x)dx$，亦卽取極限的運算。爲了分別積分法的這兩個意義，第一種積分法，稱爲"不定積分法"；第二種積分法，稱爲"定積分法"。

這兩種積分法，是彼此密切連繫着的。

一方面，因爲

$$\int_a^b\Phi(x)dx=f(b)-f(a),$$

所以，知道了導數 $\Phi(x)$ 的不定積分 $f(x)+C$，便立卽能計算在任意下上限 a 及 b 之間的定積分 $\int_a^x\Phi(x)dx$。

另一方面，如果我們能夠計算出函數 Φ 的以變量 x 爲上限的定積分 $\int_a^x\Phi(t)dt$，我們就立刻知道函數 $\Phi(x)$ 的不定積分 $f(x)+C$；因爲在 §3 中我們早已看到，表達式 I_a^x+C (其中 C 爲任意常量)就是函數 $\Phi(x)$ 的不定積分。又因爲我們有等式 $I_a^x=\int_a^x\Phi(t)dt$，所以函數 $\Phi(x)$

的不定積分可以寫為❶：

$$\int_a^x \Phi(t)dt+C。$$

由於這兩種積分之間有這種密切關係，我們就用記號

$$\int \Phi(x)dx,$$

來表示已知函數 $\Phi(x)$ 的不定積分而不標出積分上下限與附加常量 C。我們總認為：這附加常量 C 是包括在不定積分號 $\int \Phi(x)dx$ 內的因此，讀者一看到記號 $\int \Phi(x)dx$ 時，就要想到它不是 $\Phi(x)$ 的一個原函數，而同時是無窮多的全部原函數。因此，求到了不定積分 $\int \Phi(x)dx$ 的最終結果之後，恆應加上一個常量 C，雖然它並沒有在不定積分記號內明顯地寫出來。例如

（a）若 $\Phi(x)=x^3$，我們應寫 $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$，而不能只把不定積分的函數部分 $\frac{x^4}{4}$ 寫出來。

（b）若 $\Phi(x)=\cos x$，則 $\int \cos x\,dx=\sin x+C$，不要忘記把 C 加到結果上。

（c）若 $\Phi(x)=\frac{1}{1+x^2}$，則 $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tan} x+C$。

§6. 兩個相反的記號：微分記號 d 及不定積分記號 $\int$。

由前節，我們知道，不定積分是從所給微分 $\Phi(x)dx$ 求原函數

❶ 我們不能寫 $\int_a^x \Phi(x)dx$，因為我們不能用同一字母來表示積標變量（裏面的 x）與真正變量（上限的 x）。

$f(x)+C$ 的運算，所以有

$$\int \Phi(x)dx=f(x)+C, \qquad (1)$$

這時，

$$df(x)=\Phi(x)dx. \qquad (2)$$

因為 $f'(x)=\Phi(x)$。

將等式(1)兩邊微分，得：

$$d\int \Phi(x)dx=d[f(x)+C]=df(x)=\Phi(x)dx,$$

所以

$$d\int \Phi(x)dx=\Phi(x)dx。 \qquad (3)$$

另一方面，在等式(1)的左邊，照(2)式用 $df(x)$ 代替微分表達式 $\Phi(x)dx$，得

$$\int df(x)=f(x)+C。 \qquad (4)$$

所得到的等式(3)及(4)，很明顯地告訴我們：微分運算 d 與不定積分運算 $\int$ 是彼此相反的運算。事實上，等式(3)告訴我們：兩個相反的符號 d 及 $\int$ 寫在一起之後$\left(\text{先寫 } d,\text{ 後寫 } \int\right)$，可以互相消去；因此，在等式(3)的左邊把這兩個符號直接勾掉之後，即得該式的右邊部分。等式(4)告訴我們，兩個相反的符號合成 $\int d$ $\left(\text{先寫 } \int,\text{ 後寫 } d\right)$ 時，也可以互相消去。因而可以在等式(4)的左邊把它們直接勾掉，這樣就得到等式(4)右邊的部分，不過少了一個附加常量 C。這個附加常量是不可以忘記的，因為不定積分是多值運算，總是給出附加的任意常量 C 的。

將等式(3)除以 dx，即得：

$$\frac{d}{dx}\int \Phi(x)dx=\Phi(x)。\tag{3*}$$

另一方面,記住 $df(x)=f'(x)dx$, 我們可以將等式(4)改寫為

$$\int f'(x)dx=f(x)+C,\tag{4*}$$

它相當於等式

$$\int\frac{df(x)}{dx}dx=f(x)+C。\tag{4**}$$

我們看到,導數符號 $\frac{d}{dx}$ 及不定積分的符號 $\int$,不是完全相反的;因為它們不能彼此消得乾淨,還得剩個 dx。因此,真正相反的符號,只是微分號 d 與積分號 $\int$,而不是導數號 $\frac{d}{dx}$ 與積分號 $\int$。

因此,微分學的基本問題,是從已知原函數 $f(x)$ 往下導出其微分 $\Phi(x)dx$;而積分學的基本問題,則是從已知微分 $\Phi(x)dx$ 上溯其原函數 $f(x)+C$。我們可以用下面的圖解來表示:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \qquad & f(x)+C \\ \downarrow & & \uparrow \\ \Phi(x)dx & & \Phi(x)dx。\end{array}$$

像一切反運算一樣,積分法比微分法難得多。凡是能夠用初等函數通過"函數的函數"的結合法則,以有限形式表達出的函數 $f(x)$,都可以微分出來;然而,並非每一個函數 $\Phi(x)$,即使它非常簡單,都可以積分出來的。

[註] 讀者應當把不定積分的記號 $\int\Phi(x)dx$ 看作表達了 $\Phi(x)$的任意一個原函數的符號,正如同在代數中,字母 a, b, …表示了任意的數一樣。因此,C 表示一個任意常量。它的使用法是有些異常的,可能使讀者起初會覺得有些迷惑。例如,$C+C$ 結果總不寫作 $2C$,而寫作 C。因為假若 C 是任意常量的話,$2C$ 仍然是一個任意常量,因此它可以簡單地用 C 來表示。

隨便多少個任意常量與隨便什麼樣的一些常量之和,總可以只寫成一個任意常量。

讀者在計算不定積分 $\int\Phi(x)dx$ 時,恆應想到等式(1)而把任意常量 C 認為是不定積分

的一部分。

§7. 關於不定積分積不積得出來的問題

讀者已經知道了，積分學中的一個重要課題是：求所給導數 $\Phi(x)$ 的原函數 $f(x)$。

這裏讀者可以問：是不是每一個所給函數 $\Phi(x)$ 都有原函數？我們應當先告訴讀者：每一個在線段 $[a, b]$ 上連續的函數 $\Phi(x)$，的確具有原函數 $f(x)$。

這就是說：

在線段 $[a, b]$ 上連續的每一個函數 $\Phi(x)$，都可以認爲是另外某一個連續函數 $f(x)$ 的導數，亦卽 $f'(x)=\Phi(x)$。

數學分析的這個重要定理不容許有任何例外。每一個連續函數 $\Phi(x)$ 絕對有原函數 $f(x)$。但下面的問題就根本是另外一個問題：

怎樣求出所給連續函數 $\Phi(x)$ 的原函數 $f(x)$ 呢？

這個問題完全是另外一回事；因爲數學分析肯定每一個連續函數 $\Phi(x)$ 均具有原函數 $f(x)$ 時，完全沒有打算肯定：這個原函數是可以具體地(卽用有限形式)求得出來的。因此，讀者必須知道：數學分析的這個重要定理的正確性，跟會不會從所給連續函數 $\Phi(x)$ 求出原函數、能不能把它寫成有限形式，全無關係。

讀者應當知道：代數的與一切其它的有限運算，必定會把能實際(卽以有限形式)"積"出來的那種不定積分，也就是，能用我們所熟知的有限個函數(如代數函數，三角函數，反三角函數，對數函數，指數函數等)的組合表示出來的那種不定積分

$$\int \Phi(x)dx,$$

限制在極窄的範圍內。上述這些函數及其可能有的組合(有限個函數的組合)，形成了所謂初等函數類。這一類函數顯然遠遠不能概括所有

的連續函數;隨之,絕不是每一個不定積分(雖然它的存在是已經證明了的),都可以用初等函數表達出來的。這裏會碰到許多初看起來是意想不到的、並且可能認爲是故意與人爲難的一些情形。

例如,我們來看下面四個積分:

$$\int\frac{dx}{\ln x},\quad \int\frac{\ln x}{x}dx$$

$$\int\frac{dx}{\sin x},\quad \int\frac{\sin x}{x}dx。$$

第一列的積分,與第二列的積分極其相似,其差別只在於:第一列中的 $\ln x$,在第二列中寫成 $\sin x$ 罷了。但是他們有很大的分別。第一列的第一個積分,不能用初等函數積分出來;第二個却很容易積出來:

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+C。$$

反之第二列的第一個積分可以積出來:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\tan\frac{x}{2}+C。$$

但是第二個積分是不能(以有限形式)積出來的。

可是,用積分 $\int\frac{dx}{\ln x}$ 及 $\int\frac{\sin x}{x}dx$ 表示的函數,是存在的。這些函數的數値,可以用冪級數算得非常準確,要多準確,就有多準確;就是說,這些函數是用無窮次簡單代數運算所確定的。

積分學提供好些合適的積分方法,足夠應付許多情形用的。但是讀者不應迷信這些方法的力量:這些方法,不過是利用直覺與猜測把積分法的初步知識系統化,並且弄得稍微有些次序罷了。

§8. 基本積分表及直接積分法

就現在的科學情況而言,積分法在本質上是依合理方向去做推測和嘗試的手續,爲了使這手續容易做起見,我們作一個表——卽所謂基

本積分表。

這裏要講直接積分的方法，就是把我們要積分的那個所給微分$\Phi(x)dx$，與積分表的公式比較一下，假若表內有這麼一個與它相同的微分式，那麼積分就求出來了。

假若表內沒有，就要用某些方法，試着把它換算成表內的某個公式。這些換算的方法，有時是要靠技巧甚或運氣的，而且只有熟練才能掌握這種技巧。

本書中積分學的大部分，是在講實用問題中所常遇到的一些函數的積分法。

基本積分表

I. $\int d f(v)=f(v)+C$。

II. $\int a f(v)dv=a\int f(v)dv$

III. $\int[f(v)+\varphi(v)-\psi(v)]dv=\int f(v)dv+\int\varphi(v)dv-\int\psi(v)dv$。

IV. $\int v^n dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1$。

V. $\int\frac{dv}{v}=\ln v+C$。

VI. $\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C$。

VII. $\int e^v dv=e^v+C$。

VIII. $\int\sin v\,dv=-\cos v+C$。

IX. $\int\cos v\,dv=\sin v+C$。

X. $\int \frac{dv}{\cos^2 v} = \tan v + C$。

XI. $\int \frac{dv}{\sin^2 v} = -\cot v + C$。

XII. $\int \tan v\, dv = -\ln \cos v + C$。

XIII. $\int \cot v\, dv = \ln \sin v + C$。

XIV. $\int \frac{dv}{\sin v} = \ln \tan \frac{v}{2} + C$。

XV. $\int \frac{dv}{\cos v} = \ln \tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$。

XVI. $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan} \frac{v}{a} + C$。

XVII. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v-a}{v+a} + C$。

XVII*. $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} + C$。

XVIII. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{v}{a} + C$。

XIX. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C$。

XX. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{v}{a} + C$。

XXI. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C$。

§9. 公式 I、II 與 III。

公式 I 的證明　左邊的微分為：$d\int df(v) = df(v)$，因為在 $d\int$ 組

合中的符號 d 與 $\int$ 互相消去。右邊的微分也是 $df(v)$。所以有 $\int df(v)-f(v)=C$，由此而知 $\int df(v)=f(v)+C$。

公式 II 的證明　左邊的微分為：$d\int af(v)dv=af(v)dv$，因為 $d\int$ 可以消去。又因 a 是一常數，所以右邊的微分為 $d\left(a\int f(v)dv\right)=$ $=ad\int f(v)dv=af(v)dv$。由於微分相等，所以左右兩邊之差為一常數，因此有 $\int af(v)dv-a\int f(v)dv=C$。由此而知 $\int af(v)dv=a\int f(v)dv$。上式中的常數 C 沒有什麼意義，因為它已經包含在右邊的不定積分號裏了。

公式 II 可敍述如下：

常數因子可以寫在積分號之前或其後，而不影響結果。

公式 III 的證明　左邊的微分為：

$$d\int[f(v)+\varphi(v)-\psi(v)]dv=[f(v)+\varphi(v)-\psi(v)]dv=$$
$$=f(v)dv+\varphi(v)dv-\psi(v)dv。$$

右邊的微分為：

$$d\left[\int f(v)dv+\int\varphi(v)dv-\int\psi(v)dv\right]=$$
$$=d\int f(v)dv+d\int\varphi(v)dv-d\int\psi(v)dv=$$
$$=f(v)dv+\varphi(v)dv-\psi(v)dv。$$

一旦左右兩邊的微分相等，這兩邊就只差一個常數；而這個常數，又總認為是包含在不定積分號內的。

公式 III 可以敍述如下：

代數和的積分，等於積分的代數和。

§10.　公式 IV 與 V

公式 IV 的證明　因為 $d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1}+C\right)=v^n dv$，所以得

$$\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C_{\circ}$$

對於每一個 n 的數值，這公式都有意義，但 $n=-1$ 要除外；因爲這時上式右邊就變成以零來除的式子了。

因此，$n=-1$ 時，有其特別的公式 V，它具有完全另一個答案。

公式 V 的證明　因爲 $d(\ln v+C)=\frac{dv}{v}$，所以：

$$\int\frac{dv}{v}=\ln v+C_{\circ}$$

這個重要的公式可敍述如下：

假若積分號後面的是一個分式，其分子爲分母的微分，則該積分等於分母的自然對數。

例　題[1]

求下列積分：

1. $\int x^6dx=\frac{x^{6+1}}{6+1}+C=\frac{x^7}{7}+C$，從 IV，其中 $v=x$，$n=6$。

2. $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$，從 IV，其中 $v=x$，$n=\frac{1}{2}$。

3. $\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$ 從 IV，其中 $v=x$，$n=-3$。

4. $\int ax^5dx=a\int x^5dx=\frac{ax^6}{6}+C$，　　從 II 及 IV。

5. $\int(2x^3-5x^2-3x+4)dx=\int 2x^3dx-\int 5x^2dx-\int 3xdx+\int 4dx=$　　從 III，

$$=2\int x^3\,dx-5\int x^2\,dx-3\int x\,dx+4\int dx=\quad\text{從 IV，}$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x+C\quad\text{從 I。}$$

〔註〕 雖然各個積分都需一個附加的任意常量 C，但是，我們只需用一個任意常量 C，來表示這些個別的附加常量的代數和。

---

[1] 在學習積分法時，讀者應"朗誦"簡單函數的積分法，以資練習。

6. $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int 2ax^{-\frac{1}{2}}dx-\int bx^{-2}dx+\int 3cx^{\frac{2}{3}}dx=$ 從 III

$=2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx-b\int x^{-2}dx+3c\int x^{\frac{2}{3}}dx=$ 從 II

$=2a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\frac{x^{-1}}{-1}+3c\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C$ 從 IV

7. $\int(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx=a^2x+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}-\frac{x^3}{3}+C$。

提示 首先將立方展開。

8. $\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2}+C$。

解 這個積分可按公式 IV 求得。直接用 $2b^2$ 乘 $x\,dx$，即在積分號後乘以 $2b^2$，同時又在積分號前乘以 $\frac{1}{2b^2}$。按公式 II，這兩個常量互相消去。此外，與公式 IV 比較，且令 $v=$ $=a^2+b^2x^2$，$n=\frac{1}{2}$，$dv=2b^2x\,dx$。

$$\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{2b^2}\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}2b^2x\,dx=$$

$$=\int\frac{1}{2b^2}(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}b^2\,dx^2=\frac{1}{2b^2}\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}d(b^2x^2)=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2+b^2x^2)=\left[\frac{1}{2b^2}\int v^{\frac{1}{2}}dv=\frac{v^{\frac{3}{2}}}{3b^2}+C \text{ 從 IV}\right]=$$

$$=\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2}+C。$$

〔註〕 讀者應注意，不能把自變量 x 的任何函數從積分號裏拿出來，也不能隨便把積分號外跟 x 有關的乘數放到積分號內去；只有當乘數爲常數時，才可以這樣做（按公式 II）；如果它是函數，則絕對不可以，否則會改變積分值的。

9. $\int\frac{3ax\,dx}{b^2+c^2x^2}=\frac{3a}{2c^2}\ln(b^2+c^2x^2)+C$。

解 $\int\frac{3ax\,dx}{b^2+c^2x^2}=3a\int\frac{x\,dx}{b^2+c^2x^2}$。 從 II

這跟 V 類似。假若把乘數 $2c^2$ 放在積分號裏，而積分號外也乘上其倒數 $\frac{1}{2c^2}$，則積分不變。與公式 V 比較，$v=b^2+c^2x^2$，$dv=2c^2x\,dx$。

所以積分步驟如下：

$$\int\frac{3ax\,dx}{b^2+c^2x^2}=3a\int\frac{x\,dx}{b^2+c^2x^2}=\frac{3}{2}a\int\frac{2x\,dx}{b^2+c^2x^2}=\frac{3a}{2}\int\frac{dx^2}{b^2+c^2x^2}=$$

$$=\frac{3a}{2c^2}\int\frac{c^2dx^2}{b^2+c^2x^2}=\frac{3a}{2c^2}\int\frac{dc^2x^2}{b^2+c^2x^2}=\frac{2a}{2c^2}\int\frac{d(b^2+c^2x^2)}{b^2+c^2x^2}=$$

$$=\left[\frac{3a}{2c^2}\int\frac{dv}{v}=\frac{3a}{2c^2}\ln v+C \text{ 從 V}\right]=\frac{3a}{2c^2}\ln(b^2+c^2x^2)+C。$$

10. $\int\frac{x^3\,dx}{x+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)+C$。

解 首先以分母除分子，則

$$\frac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}。$$

代入積分中，用公式 III 再積分之。

11. $\int\frac{2x-1}{2x+3}dx=x-\ln(2x+3)^2+C$。

解 除出來，$\frac{2x-1}{2x+3}=1-\frac{4}{2x+3}$。代入之，利用III，卽得結果。

習　題

試求下列積分並驗證之：

1. $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$。
2. $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$。
3. $\int x\sqrt{x}\,dx=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+C$。
4. $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+C$。
5. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+C$。
6. $\int 4t\,dt=2t^2+C$。
7. $\int\frac{ay^2dy}{b}=\frac{ay^3}{3b}+C$。
8. $\int\sqrt{3x}\,dx=\frac{2x\sqrt{3x}}{3}+C$。
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax}}=\frac{2\sqrt{ax}}{a}+C$。
10. $\int\sqrt{2px}\,dx=\frac{2x\sqrt{2px}}{3}+C$。
11. $\int(x^3-3x^2+4x-7)dx=\frac{x^4}{4}-x^3+2x^2-7x+C$。
12. $\int\frac{4x-2\sqrt{x}}{x}dx=4x-4\sqrt{x}+C$。
13. $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{6}+\frac{2}{x}+C$。
14. $\int x(2x-5)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+C$。
15. $\int\frac{x^4-10x^2+5}{x^2}dx=\frac{x^3}{3}-10x-\frac{5}{x}+C$。

16. $\int\sqrt{1+2x}\,dx=\frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$。

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}=-\frac{\sqrt{5-4x}}{2}+C$。

18. $\int\left(\sqrt{2x}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right)dx=\frac{2x\sqrt{2x}}{3}+2\sqrt{2x}+C$。

19. $\int\frac{4x\,dx}{\sqrt{3x}}=\frac{8x\sqrt{3x}}{9}+C$。　　20. $\int(3-2x)^2\,dx=-\frac{(3-2x)^3}{6}+C$。

21. $\int\frac{3x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{3}{2(x^2+1)}+C$。　　22. $\int x\sqrt{2x^2+7}\,dx=\frac{(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$。

23. $\int 9x^2\sqrt[3]{x^3+10}\,dx=\frac{9(x^3+10)^{\frac{4}{3}}}{4}+C$。

24. $\int\frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{8-x^2}}=-3(8-x^2)^{\frac{2}{3}}+C$。

25. $\int(1+\sqrt{x})^2\,dx=x+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{x^2}{2}+C$。

26. $\int\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx=x-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+C$。

27. $\int\sqrt{x}\,(1-x^2)\,dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+C$。

28. $\int(3t+2)^3\,dt=\frac{(3t+2)^4}{12}+C$。

29. $\int\frac{7dy}{(1+2y)^3}=-\frac{7}{4(1+2y)^2}+C$。

30. $\int t^2(2-t^3)^3\,dt=-\frac{(2-t^3)^4}{12}+C$。

31. $\int\frac{x^2dx}{(3+2x^3)^2}=-\frac{1}{6(3+2x^3)}+C$。

32. $\int 5x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{5(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$。

33. $\int(2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}\,dx=\frac{(2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{5}{3}}}{5}+C$。

34. $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\sqrt{x^2+2x}+C$。

35. $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\,dx=-\frac{4(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{3}+C$。

36. $\int \frac{(2+\ln x)dx}{x}=\frac{(2+\ln x)^2}{2}+C$。

37. $\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int(\sin x)^2\cos x\,dx=\frac{(\sin x)^3}{3}+C$。

提示　用IV，令 $v=\sin x$, $dv=\cos x\,dx$, $n=2$。

38. $\int \sin 2x\cos 2x\,dx=\frac{\sin^2 2x}{4}+C$。

39. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2\sin^3\frac{x}{2}}{3}+C$。

40. $\int \tan ax\frac{dx}{\cos^2 ax}=\frac{\tan^2 ax}{2a}+C$。

41. $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt{5+\cos 3x}}=-\frac{2\sqrt{5+\cos 3x}}{3}+C$。

42. $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx=-\frac{1}{1+\tan x}+C$。

43. $\int \frac{dx}{3+2x}=\frac{1}{2}\ln(3+2x)+C$。　44. $\int \frac{x\,dx}{2-x^2}=-\frac{1}{2}\ln(2-x^2)+C$。

45. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+5x}=\ln(x^2+5x)+C$。　46. $\int \frac{2x^2\,dx}{8x^3-7}=\frac{1}{12}\ln(8x^3-7)+C$。

47. $\int \frac{at^n dt}{1+bt^{n+1}}=\frac{a}{(n+1)b}\ln(1+bt^{n+1})+C$。

48. $\int \frac{e^\theta d\theta}{4-3e^\theta}=-\frac{1}{3}\ln(4-3e^\theta)+C$。　49. $\int \frac{2\cos x\,dx}{4+\sin x}=2\ln(4+\sin x)+C$。

50. $\int \frac{\sec^2 y\,dy}{a+b\tan y}=\frac{1}{b}\ln(a+b\tan y)+C$。

51. $\int \frac{x+2}{x-1}dx=x+3\ln(x-1)+C$。　52. $\int \frac{(x-1)^2 dx}{2x}=\frac{x^2}{4}-x+\ln\sqrt{x}+C$。

53. $\int \frac{x^2-4}{x-3}dx=\frac{x^2}{2}+3x+5\ln(x-3)+C$。

54. $\int \frac{e^{2s}ds}{e^s+1}=e^s-\ln(e^s+1)+C$。　55. $\int \frac{ae^\theta+b}{ae^\theta-b}d\theta=2\ln(ae^\theta-b)-\theta+C$。

求下列積分，並以微分法驗證所得結果：

56. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$。

解 $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}=\int \frac{dx^2}{\sqrt[3]{6-5x^2}}=-\frac{1}{5}\int \frac{d(6-5x^2)}{\sqrt[3]{6-5x^2}}=$

$$=-\frac{1}{5}\int (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}d(6-5x^2)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(6-5x^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=$$

$$=-\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}}+C。$$

驗證 $d\left\{-\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}}+C\right\}=-\frac{3}{10}\,\frac{2}{3}\cdot(6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}dx-10x\,dx=\frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$。

57. $\int x^5 dx$。　58. $\int \frac{dx}{x^3}$。　59. $\int \sqrt[3]{9t^2}dt$。

60. $\int (3y)^{\frac{2}{3}}dy$。　61. $\int \frac{dr}{\sqrt{2r^3}}$。　62. $\int \frac{a\,dx}{\sqrt[3]{bx^2}}$。

63. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$。　64. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-2}}$。　65. $\int \frac{2dx}{3x-2}$。

66. $\int \tan^2 w\cdot\sec^2 w\cdot dw$。　67. $\int x\sqrt[3]{4-x^3}\,dx$。

68. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$。　69. $\int \frac{(3-2x)^2 dx}{x}$。

70. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+5}$。　71. $\int \frac{\cos a\theta\,d\theta}{b-\sin a\theta}$。

72. $\int e^x(e^x+2)^2 dx$。　73. $\int \left(y-\frac{1}{y}\right)^3 dy$。

74. $\int \frac{(\ln x)^2 dx}{2x}$。　75. $\int \sec^4\Phi\tan\Phi\,d\Phi$。

76. $\int \frac{s^2-5}{s+2}ds$。　77. $\int \frac{\csc^2\theta\,d\theta}{2\cot\theta+3}$。

78. $\int \frac{2x-7}{x+4}dx$。　79. $\int \frac{3x\,dx}{(2x^2-1)^2}$。

80. $\int \frac{x^3+x}{x^2+x}dx$。　81. $\int \frac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}dx$。

§11. 公式 VI 與 VII

這兩個公式可直接由其對應的微分公式得出。

例　證明 $\int ba^{2x}dx=\frac{ba^{2x}}{2\ln a}+C$。

解 $\int ba^{2x}\,dx = b\int a^{2x}\,dx$（按 II）。

這個式子跟 VI 相似。令 $2x=v$，則 $dv=2dx$。用 2 乘 dx，又把乘積 $\frac{1}{2}$ 放在積分號外，即得

$$b\int a^{2x}\,dx=\frac{b}{2}\int a^{2x}2dx=\frac{b}{2}\int a^{2x}d(2x)=$$

$$=\left[\frac{b}{2}\int a^{v}dv=\frac{b}{2}\,\frac{a^{v}}{2\ln a}+C\right]=\frac{b}{2}\cdot\frac{a^{2x}}{\ln a}+C \text{ 從 VI。}$$

習　題

求下列各積分：

1. $\int 4e^{2x}\,dx=2e^{2x}+C$。
2. $\int 2e^{\frac{x}{3}}dx=6e^{\frac{x}{3}}+C$。
3. $\int\frac{dx}{e^{x}}=-\frac{1}{e^{x}}+C$。
4. $\int 10^{x}\,dx=\frac{10^{x}}{\ln 10}+C$。
5. $\int a^{ny}\,dy=\frac{a^{ny}}{n\ln a}+C$。
6. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}+C$。
7. $\int\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=a\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)+C$。
8. $\int\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^{2}dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)-2x+C$。
9. $\int xe^{x^{2}}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C$。
10. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-e^{\cos x}+C$。
11. $\int e^{\sin 2\theta}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}e^{\sin 2\theta}+C$。
12. $\int\sqrt{e^{t}}\,dt=2\sqrt{e^{t}}+C$。
13. $\int a^{x}e^{x}dx=\frac{a^{x}e^{x}}{1+\ln a}+C$。
14. $\int(x-1)e^{x^{2}-2x}dx=\frac{1}{2}e^{x^{2}-2x}+C$。
15. $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^{2}}=-e^{\frac{1}{x}}+C$。

試求下列積分，並以微分法驗證所得結果：

16. $\int e^{1-x}dx$。
17. $\int 4e^{\frac{x}{4}}dx$。
18. $\int xe^{\frac{x^{2}}{4}}dx$。
19. $\int b^{x}dx$。
20. $\int(e^{x}+x)dx$。
21. $\int\frac{dx}{5^{x}}$。

22. $\int\left(\frac{e^x+2}{e^x}\right)dx$。　23. $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$。　24. $\int 2e^{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta$。

25. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx$。　26. $\int(e^{2x})^3dx$。　27. $\int e^{\sin\pi t}\cos\pi t\, dt$。

28. $\int xe^{-x^2}dx$。　29. $\int(e^t-e^{-t})^3dt$。　30. $\int(4e)^x dx$。

31. $\int\frac{x^2dx}{e^{x^3}}$。

§12. 公式 VIII—XV

公式 VIII—XI 可立卽由其對應的微分公式得出。

XII 的證明

$$\int\tan v\,dv=\int\frac{\sin v}{\cos v}dv=-\int\frac{-\sin v\,dv}{\cos v}=-\int\frac{d\cos v}{\cos v}=$$

$$=-\ln\cos v+C \text{ 從 V。}$$

XIII 的證明

$$\int\cot v\,dv=\int\frac{\cos v}{\sin v}dv=\int\frac{d\sin v}{\sin v}=\ln\sin v+C \text{ 從 V。}$$

XIV 的證明

$$\int\frac{dv}{\sin v}=\int\frac{dv}{2\sin\frac{v}{2}\ \cos\frac{v}{2}}=\int\frac{d\frac{v}{2}}{\tan\frac{v}{2}\cdot\cos^2\frac{v}{2}}=\int\frac{d\tan\frac{v}{2}}{\tan\frac{v}{2}}=\ln\tan\frac{v}{2}+C。$$

XV 的證明

$$\int\frac{dv}{\cos v}=\int\frac{dv}{\sin\left(v+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{d\left(v+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(v+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\tan\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C。$$

例 1. 證明等式:　$\int\sin 2ax\,dx=-\frac{\cos 2ax}{2a}+C$。

解　這跟 VIII 相似。令 $v=2ax$，則 $dv=2a\,dx$。在 dx 前乘以 $2a$，又以其倒數 $\frac{1}{2a}$ 乘在積分號外，卽得

$$\int \sin 2ax\,dx=\frac{1}{2a}\int \sin 2ax\cdot 2a\,dx\left[=\frac{1}{2a}\int \sin v dv=-\frac{1}{2a}\cos v+C \text{ 從 VIII}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot(-\cos 2ax)+C=-\frac{\cos 2ax}{2a}+C。$$

例 2　證明下面的積分：

$$\int (\tan 2s-1)^2 ds=\frac{1}{2}\tan 2s+\ln\cos 2s+C。$$

解　$(\tan 2s-1)^2=\tan^2 2s-2\tan 2s+1$，同時，$\tan^2 2s=\frac{1}{\cos^2 2s}-1$。由此代入積分內，即得：

$$\int (\tan 2s-1)^2 ds=\int\left(\frac{1}{\cos^2 2s}-2\tan 2s\right)ds=\int\frac{ds}{\cos^2 2s}-2\int \tan 2s\,ds。$$

令 $v=2s$，則 $dv=2\,ds$。公式 X 及 XII 使我們可做下面的積分步驟：

$$\int\frac{ds}{\cos^2 2s}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2s)}{\cos^2(2s)}\left[=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{\cos^2 v}=\frac{1}{2}\tan v+C\right]=\frac{1}{2}\tan 2s+C。$$

$$\int \tan 2s\,ds=\int\frac{1}{2}\tan 2s d(2s)\left[=\frac{1}{2}\int \tan v dv=-\frac{1}{2}\ln\cos v\right]=-\frac{1}{2}\ln\cos 2s+C。$$

習　題

求下列各積分：

1. $\int \sin\frac{x}{2}\,dx=-2\cos\frac{x}{2}+C$。　　2. $\int \cos 3\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\sin 3\theta+C$。

3. $\int \tan n\Phi\,d\Phi=-\frac{1}{n}\ln\cos n\Phi+C$。

4. $\int \cot\frac{\theta}{2}\,d\theta=2\ln\sin\frac{\theta}{2}+C$。　　5. $\int\frac{dx}{\cos 4x}=\frac{1}{4}\ln\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$。

6. $\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}=a\ln\tan\frac{x}{2a}+C$。　　7. $\int\frac{dx}{\cos^2(1-x)}=-\tan(1-x)+C$。

8. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{2-x}{2}\right)}=2\cot\left(\frac{2-x}{2}\right)+C$。

9. $\int \sec 3\theta\cdot\tan 3\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\sec 3\theta+C$。

10. $\int \csc\frac{y}{4}\cot\frac{y}{4}\,dy=-4\csc\frac{y}{4}+C$。

11. $\int\frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x^2}=\cos\frac{1}{x}+C$。　　12. $\int\frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}=2\sin\sqrt{x}+C$。

13. $\int x\tan(x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\ln\cos(x^2)+C$。

14. $\int\frac{dx}{1+\cos x}=-\cot x+\csc x+C$。

提示 以 $1-\cos x$ 乘分子分母，並在積分前把式子變換一下。

15. $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\tan x-\sec x+C$。 16. $\int\frac{\sin s\,ds}{1+\cos s}=-\ln(1+\cos s)+C$。

17. $\int\frac{\sec^2 x\,dx}{1+\tan x}=\ln(1+\tan x)+C$。

18. $\int e^x\cos e^x\,dx=\sin e^x+C$。 19. $\int\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\,d\theta=\sin^3\frac{\theta}{3}+C$。

20. $\int(x-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-\sin 2x)+C$。

21. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}=2\sqrt{1+\sin x}+C$。

22. $\int\frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\ln\tan\frac{\theta}{4}+C$。

求下列各積分，並以微分法驗證所得結果：

23. $\int\sin\frac{3x}{4}\,dx$。

24. $\int\frac{2ds}{\sin 4s}$。

25. $\int a\cos b\theta\,d\theta$。

26. $\int\tan\frac{\theta}{n}\,d\theta$。

27. $\int\cot 5y\,dy$。

28. $\int\frac{dx}{\cos(3x-2)}$。

29. $\int\frac{dx}{\sin(b-ax)}$。

30. $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{a}}$。

31. $\int\frac{dy}{\sin^2 4y}$。

32. $\int\frac{\tan m\Phi}{\cos m\Phi}\,d\Phi$。

33. $\int\frac{\cot 7x}{\sin 7x}\,dx$。

34. $\int\frac{\sin\sqrt{t}\,dt}{4\sqrt{t}}$。

35. $\int\frac{\tan\frac{2}{x}\,dx}{x^2}$。

36. $\int(1+2\sec\theta)^2\,d\theta$。

37. $\int(2-\csc x)^2\,dx$。

38. $\int(\tan s-\cot s)^2\,ds$。

39. $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$。

40. $\int\frac{dy}{3\cos y}$。

41. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$。 42. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{1-\cos 2x}$。

43. $\int (\tan x-\sec x)^2\, dx$。 44. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$。

45. $\int \frac{\sec x \tan x\, dx}{2+3\sec x}$。 46. $\int \frac{a dy}{\cot by}$。

47. $\int x^2 \sin (x^3) dx$。 48. $\int (x^2+3\sin x)dx$。

49. $\int \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\cos x}\right)dx$。 50. $\int \left(1+2\cot\frac{s}{2}\right)^2 ds$。

§13. 公式 XVI--XIX

公式 XVI—XVIII 極易由其對應的微分公式得出。

XVI 的證明 因爲

$$d\left(\frac{1}{a}\arc\tan\frac{v}{a}+C\right)=\frac{1}{a}\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1+\frac{v^2}{a^2}}=\frac{dv}{v^2+a^2},$$

所以得到
$$\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\arc\tan\frac{v}{a}+C。$$

XVII 及 XVII* 的證明 先證明 XVII。由代數即知:

$$\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}=\frac{2a}{v^2-a^2}。$$

由此,得:
$$\frac{1}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right]。$$

所以
$$\int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dv}{v-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dv}{v+a}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(v-a)-\frac{1}{2a}\ln(v+a)+C=\frac{1}{2a}\ln\frac{v-a}{v+a}+C。$$

同樣,爲證明 XVII*,由代數知:

$$\frac{1}{a+v}+\frac{1}{a-v}=\frac{2a}{a^2-v^2}。$$

以下的證法與上面的相同,這裏把它省略了。

[註]積分 XVII 及 XVII* 間有顯明的等式：

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = -\int \frac{dv}{a^2-v^2}。$$

由此可知，每次都可同時應用兩個公式。以後我們將看到，在許多情形中，我們只能擇其一，而放棄另一個。

XVIII 的證明　因爲：

$$d\left(\arcsin\frac{v}{a}+C\right) = \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}},$$

所以

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \arcsin\frac{v}{a}+C。$$

XIX 的證明　因爲

$$d[\ln(v+\sqrt{v^2\pm a^2})] = \frac{d(v+\sqrt{v^2\pm a^2})}{v+\sqrt{v^2\pm a^2}} =$$

$$= \frac{dv+\frac{2v\,dv}{2\sqrt{v^2\pm a^2}}}{v+\sqrt{v^2\pm a^2}} = \frac{\left(1+\frac{v}{\sqrt{v^2\pm a^2}}\right)}{v+\sqrt{v^2\pm a^2}}dv =$$

$$= \frac{v+\sqrt{v^2\pm a^2}}{v+\sqrt{v^2\pm a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{v^2\pm a^2}}\cdot dv = \frac{dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}},$$

所以

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}} = \ln(v+\sqrt{v^2\pm a^2})+C。$$

例　求證積分　$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3}+C$。

解　這可用 XVI。因爲，令 $v^2=4x^2$，$a^2=9$，即得 $v=2x$，$dv=2dx$，$a=3$。因此，若以 2 乘 dx，而在積分號前也乘上 $\frac{1}{2}$，即得

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{2a}\arctan\frac{v}{a}+C = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3}+C。$$

習　題

證實下列積分式：

1. $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arc\tan\frac{x}{2}+C$。 2. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}+C$。

3. $\int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}} = \arc\sin\frac{y}{4}+C$。 4. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-4}} = \ln(s+\sqrt{s^2-4})+C$。

5. $\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)+C$。 6. $\int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{3t+2}{3t-2}\right)+C$。

7. $\int \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arc\tan x\sqrt{2}+C$。 8. $\int \frac{2dw}{3-8w^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3}+w\sqrt{8}}{\sqrt{3}-w\sqrt{8}}+C$。

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arc\sin\frac{3x}{2}+C$。

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}} = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+3})+C$。

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x\sqrt{7}}{3}+C$。

12. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+2})+C$。

13. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arc\tan e^x+C$。

14. $\int \frac{\cos t\,dt}{4-\sin^2 t} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sin t}{2-\sin t}\right)+C$。

15. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\arc\sin(x^2)+C$。

16. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{a}\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})+C$。

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}} = \arc\sin\left(\frac{u+b}{a}\right)+C$。

求下列各積分，並以微分法驗證所得結果：

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$。 19. $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^2+25}}$。 20. $\int \frac{dt}{9t^2+16}$。

21. $\int \frac{dx}{16x^2-9}$。 22. $\int \frac{6dx}{5+3x^2}$。 23. $\int \frac{2dy}{4y^2-1}$。

24. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2+8}}$。 25. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^4-9}}$。 26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+7}}$。

27. $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$。 28. $\int \frac{4t\,dt}{6-5t^2}$。 29. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{4+\cos^2\theta}}$。

30. $\int \frac{dx}{m^2+(x+n)^2}$。 31. $\int \frac{du}{4-(2u-1)^2}$。

在積分表公式 XVI－XIX 中，分母裏有只包含兩項的二次表達式(直接作爲分母或在根號之內)。假若我們遇到類似形式的積分，不過分母裏包含的(直接或在根號內)是具有三項的完全二次表達式，那麽我們應當先把它變換爲兩項式。爲此，我們可以把含有變量的兩項和，再加上一個常數，使它變成一個完全平方。另外再減去這個常數。這種做法，可從下面三個例子看出來：

例 1. 驗證積分：

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C。$$

解 由 $x^2+2x+5=(x^2+2x+1)+4=(x+1)^2+4,$

可知：

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}。$$

這就是 XVI 的形式，因爲我們可以設 $v=x+1$ 及 $a=2$；這時 $dv=dx$ 。所以積分變爲

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C。$$

例 2.

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=2\arcsin\frac{2x-1}{3}+C。$$

解 因爲 x^2 的係數是負的，所以它是 XVIII 的形式，我們有：

$$2+x-x^2=2-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2。$$

設 $v=x-\frac{1}{2}$， $a=\frac{3}{2}$，則 $dv=dx$ 。

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=2\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=2\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=2\arcsin\frac{v}{a}+C \qquad (\text{按 XVIII})$$

$$=2\arcsin\frac{2x-1}{3}+C。$$

例 3.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}=\frac{1}{10}\ln\frac{3x-3}{3x+7}+C。$$

解 $3x^2+4x-7=3\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{25}{9}\right)=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]。$

可知

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}=\int \frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]}=\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^2-a^2} \qquad (\text{按 XVII})$$

因爲我們可以設：$v=x+\frac{2}{3}$ 及 $a=\frac{5}{3}$，而 $dv=dx$ 。我們求得：

$$\frac{1}{3}\int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{6a}\ln\frac{v-a}{v+a}+C=\frac{1}{10}\ln\frac{x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}+C。$$

習 題

求下列積分:

1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+C$。

2. $\int\frac{dx}{2x-x^2-10}=-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$。

3. $\int\frac{3dx}{x^2-8x+25}=\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C$。

4. $\int\frac{dx}{x^2-6x+12}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right)+C$。

5. $\int\frac{dx}{x^2+2x}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+C$。

6. $\int\frac{dx}{4x-x^2}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)+C$。

7. $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$。

8. $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{2x+1}{2}\right)+C$。

9. $\int\frac{dx}{9x^2-6x-8}=\frac{1}{18}\ln\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)+C$。

10. $\int\frac{8dt}{16t^2+8t+9}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{4t+1}{2\sqrt{2}}\right)+C$。

11. $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan}(x^2+1)+C$。

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{x-1}{4}\right)+C$。

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}=\ln(x-3+\sqrt{11-6x+x^2})+C$。

14. $\int\frac{2dx}{\sqrt{5-4x-3x^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{3x+2}{\sqrt{19}}\right)+C$。

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}(x-1)+C$。

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+4x^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{7}{8}+\sqrt{x^2+\frac{7x}{4}}\right)+C$。

17. $\int \frac{6dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}}=\frac{6}{\sqrt{7}}\arcsin\left(\frac{7x+4}{\sqrt{79}}\right)+C$。

求下列積分,並用微分法驗證所得結果:

18. $\int \frac{5dx}{x^2+12x+11}$。

19. $\int \frac{dx}{4x-x^2-2}$。

20. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$。

21. $\int \frac{dy}{9y^2+12y-21}$。

22. $\int \frac{4dt}{4t^2+12t+5}$。

23. $\int \frac{12du}{9u^2-6u+5}$。

24. $\int \frac{dx}{9x^2+3x+1}$。

25. $\int \frac{dx}{9x^2-3x-1}$。

26. $\int \frac{2dx}{3x^2+4x+5}$。

27. $\int \frac{4dx}{5x^2+6x+7}$。

28. $\int \frac{4dx}{5x^2-7x-6}$。

29. $\int \frac{x^2dx}{x^6-6x^3+5}$。

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-12x-x^2}}$。

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-6x-x^2}}$。

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$。

33. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t-2t^2}}$。

34. $\int \frac{dy}{\sqrt{1-6y-9y^2}}$。

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-4x^2}}$。

36. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+12x+11}}$。

37. $\int \frac{6dt}{\sqrt{1-t-t^2}}$。

38. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-6x^3+5}}$。

39. $\int \frac{5du}{\sqrt{5+u-u^2}}$。

假若被積分式是一個分式,其分母爲二次式,或二次式的方根,而分子是一次式,則利用下面例題中的方法,可以將積分變爲表中的標準積分:

例 1. 證明 $\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9}-\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+C$。

解 將積分分爲兩個:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\int \frac{3xdx}{\sqrt{4x^2+9}}-\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}。$$

這兩個積分各可按公式 IV 及 XIX 積出來。

例 2. $$\int\frac{2x-3}{3x^2+4x-7}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)-\frac{13}{30}\ln\frac{3x-3}{3x+7}+C。$$

解 $3x^2+4x-7=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]$。設 $v=x+\frac{2}{3}$，

則 $x=v-\frac{2}{3}$，$dv=dx$；代入，得：

$$\int\frac{2x-3}{3x^2+4x-7}dx=\int\frac{2\left(v-\frac{2}{3}\right)-3}{3\left(v^2-\frac{25}{9}\right)}dx=\frac{1}{9}\int\frac{6v-13}{v^2-\frac{25}{9}}dv=\frac{1}{3}\int\frac{2vdv}{v^2-\frac{25}{9}}-\frac{13}{9}\int\frac{dv}{v^2-\frac{25}{9}}。$$

利用公式 V 及 XVII，並以 $v=x+\frac{2}{3}$ 代入，即得所求結果。

習 題

求下列各積分：

1. $\int\frac{(2x+3)dx}{4x^2+1}=\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)+\frac{3}{2}\arctan 2x+C$。

2. $\int\frac{(6x-1)dx}{1-9x^2}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)-\frac{1}{3}\ln(9x^2-1)+C$。

3. $\int\frac{(2x-3)dx}{3x^2-2}=\frac{1}{3}\ln(3x^2-2)-\frac{\sqrt{6}}{4}\ln\left(\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+C$。

4. $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$。

5. $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$。

6. $\int\frac{(6x+5)dx}{\sqrt{9x^2+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1}+\frac{5}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2+1})+C$。

7. $\int\frac{(1-2x)dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$。

8. $\int\frac{(x+3)dx}{6x-x^2}=-\frac{1}{2}\ln(6x-x^2)-\ln\left(\frac{x-6}{x}\right)+C$。

9. $\int\frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5}=\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$。

10. $\int\frac{x\,dx}{2-6x-x^2}=-\frac{1}{2}\ln(2-6x-x^2)+\frac{3}{2\sqrt{11}}\ln\left(\frac{x+3-\sqrt{11}}{x+3+\sqrt{11}}\right)+C$。

11. $\int\frac{(1-x)dx}{4x^2-4x-3}=-\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x-3)+\frac{1}{16}\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)+C$。

12. $\int \frac{(3x-2)dx}{1-6x-9x^2}=-\frac{1}{6}\ln(1-6x-9x^2)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right)+C$。

13. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\sqrt{x^2+2x}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x})+C$。

14. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x-x^2}}=-\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$。

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}=-\sqrt{27+6x-x^2}+3\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right)+C$。

16. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{19-5x+x^2}}=3\sqrt{19-5x+x^2}+\frac{19}{2}\ln\left(x-\frac{5}{2}+\sqrt{19-5x+x^2}\right)+C$。

17. $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5}-\frac{1}{4}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5})+C$。

18. $\int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}=-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{2x-3}{2}\right)+C$。

求下列各積分，並以微分法驗證所得結果：

19. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+1}$。

20. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-1}$。

21. $\int \frac{(7-3x)dx}{5-2x^2}$。

22. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{1-3x^2}}$。

23. $\int \frac{(9+x)dx}{\sqrt{5+2x^2}}$。

24. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x}$。

25. $\int \frac{(6-x)dx}{5x-x^2}$。

26. $\int \frac{(x-6)dx}{x^2-4x-5}$。

27. $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2+8x+20}$。

28. $\int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x-7}$。

29. $\int \frac{x\,dx}{x^2-8x+18}$。

30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+9x^2}}$。

31. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$。

32. $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$。

33. $\int \frac{(6x+5)dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$。

34. $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$。

§ 14. 公式 XX 與 XXI

為了要得到這兩個公式，我們要引用所謂“分部積分法”。這個方法，我們以後將予以說明，下面是它的要點：

常常很難直接求得某個積分 $\int udv$，其中 u 及 v 是某個自變量的已知函數；可是，有時將該積分中字母 u 及 v 對換之後，得到的積分 $\int vdu$，却是容易求得的。這兩個積稱爲互補積分。

乍看起來，好像兩個互補積分的和，也像各個單獨的積分一樣，是不容易積出來的。但是，這個結論是不對的，它們的和是立刻可以積出來的，而且其結果是純代數的結果：乘積 uv。

爲了看出這點，我們取萊博尼茲公式：

$$d(uv)=udv+vdu, \tag{1}$$

並將它積分：

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu。$$

左邊積分及微分號列在一起，互相消去，卽得乘積 uv。我們用不着加一個任意常數到 uv 上去，因爲右邊有兩個不定積分，它們本身就包含了兩個任意常數。因此上面等式可寫爲：

$$uv=\int udv+\int vdu。 \tag{2}$$

這表示了：兩個互補積分之和等於代數式 uv。

由此等式卽知：假若我們已經知道這兩個互補積分中的一個，例如 $\int vdu$，那麼另外一個 $\int udv$ 就可以求得了，因爲從等式(2)，我們有：

XXII
$$\int udv=uv-\int vdu。$$

上面所講的方法，是積分中很有用的方法，它稱爲"分部積分法"。這個方法是否成功，當然就在於函數 u 及 v 選擇得是否合適。

XX 的證明　以 I 記那個未知的積分：

$$I=\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv。$$

以 $\sqrt{a^2-v^2}$ 乘、除，得

$$I=\int\frac{a^2-v^2}{\sqrt{a^2-v^2}}\,dv=\int\frac{a^2\,dv}{\sqrt{a^2-v^2}}-\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{a^2-v^2}}。 \tag{3}$$

不難由表中查得第一個積分是：

$$\int\frac{a^2\,dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=a^2\int\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=a^2\arcsin\frac{v}{a}+C。\tag{4}$$

第二個積分又不難用 I 表達。事實上，我們有：

$$-\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\int\frac{v(-2v)dv}{2\sqrt{a^2-v^2}}=\int\frac{vd(a^2-v^2)}{2\sqrt{a^2-v^2}}=\int v\,d\sqrt{a^2-v^2}=$$

[利用分部積分法]

$$=v\sqrt{a^2-v^2}-\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv=v\sqrt{a^2-v^2}-I。\tag{5}$$

以(4)及(5)代入(3)中，得：

$$I=a^2\arcsin\frac{v}{a}+v\sqrt{a^2-v^2}-I。\tag{6}$$

這個方程中不用加上一個任意常量 C，因為 I 中已經含有了。因此，我們得到只含一個未知量的一個代數方程。解出來，即得：

$$2I=a^2\arcsin\frac{v}{a}+v\sqrt{a^2-v^2}。$$

亦即：
$$I=\frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{v}{a}+C。$$

XXI 的證明　用 I 記未知的積分：

$$I=\int\sqrt{v^2\pm a^2}\,dv。$$

乘以 $\sqrt{v^2\pm a^2}$，又除以 $\sqrt{v^2\pm a^2}$，得：

$$I=\int\frac{v^2\pm a^2}{\sqrt{v^2\pm a^2}}\,dv=\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}+\int\frac{\pm a^2\,dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}。\tag{7}$$

第二個積分是表中有的：

$$\int\frac{\pm a^2\,dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}=\pm a^2\int\frac{dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}=\pm a^2\ln(v+\sqrt{v^2\pm a^2})+C。\tag{8}$$

第一個積分不難再用 I 表達。事實上，我們有：

$$\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}=\int\frac{v\cdot 2v\,dv}{2\sqrt{v^2\pm a^2}}=\int\frac{vd(v^2\pm a^2)}{2\sqrt{v^2\pm a^2}}=\int vd\sqrt{v^2\pm a^2}=$$

[利用分部積分法]

$$=v\sqrt{v^2\pm a^2}-\int\sqrt{v^2\pm a^2}\,dv=v\sqrt{v^2\pm a^2}-I。\quad (9)$$

以(8)及(9)代入(7)中，即得：

$$I=\pm a^2\ln(v+\sqrt{v^2\pm a^2})+v\sqrt{v^2\pm a^2}-I。\quad (10)$$

從方程(10)中解出 I 來，得

$$I=\frac{v}{2}\sqrt{v^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln(v+\sqrt{v^2\pm a^2})+C。$$

例 1. 證明 $\int\sqrt{4-9x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$。

解 與 XX 比較，設 $a^2=4$，$v=3x$。則 $dv=3dx$。所以

$$\int\sqrt{4-9x^2}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{4-9x^2}\,3dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv。$$

引用公式 XX，並代入 $v=3x$ 及 $a^2=4$，即得答案。

例 2. $\int\sqrt{3x^2+4x-7}\,dx=\frac{1}{6}(3x+2)\sqrt{3x^2+4x-7}-$

$$-\frac{25\sqrt{3}}{18}\ln(3x+2+\sqrt{9x^2+12x-21})+C。$$

解 $3x^2+4x-7=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]=3(v^2-a^2)$，其中 $v=x+\frac{2}{3}$，$a=\frac{5}{3}$；則 $dv=dx$。所以

$$\int\sqrt{3x^2+4x-7}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{v^2-a^2}\,dv。$$

利用公式 XXI，並代入 $v=x+\frac{2}{3}$ 及 $a=\frac{5}{3}$，即得答案。

習 題

1. $\int\sqrt{1-4x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\arcsin 2x+C$。

2. $\int\sqrt{1+9x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1+9x^2}+\frac{1}{6}\ln(3x+\sqrt{1+9x^2})+C$。

3. $\int\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{x^2-4}-\ln(x+\sqrt{x^2-4})+C$。

4. $\int\sqrt{25-9x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{25-9x^2}+\frac{25}{6}\arcsin\frac{3x}{5}+C$。

5. $\int\sqrt{4x^2+9}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9}+\frac{9}{4}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+9}\right)+C$。

6. $\int\sqrt{5-3x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\arcsin x\sqrt{\frac{3}{5}}+C$。

7. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$。

8. $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}+2\ln\left(x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right)+C$。

9. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)+C$。

10. $\int\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx=\frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2}+$

$$+\frac{9}{4}\ln\left(2x-1+\sqrt{10-4x+4x^2}\right)+C。$$

算出下列積分,並以微分法驗證所得結果。

11. $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$。

12. $\int\sqrt{9+16x^2}\,dx$。

13. $\int\sqrt{x^2-7}\,dx$。

14. $\int\sqrt{25-36x^2}\,dx$。

15. $\int\sqrt{5-4x^2}\,dx$。

16. $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$。

17. $\int\sqrt{x^2+4x+13}\,dx$。

18. $\int\sqrt{9x^2-12x}\,dx$。

19. $\int\sqrt{8+6x-9x^2}\,dx$。

20. $\int\sqrt{4x-1-x^2}\,dx$。

§15. 三角函數的微分式

現在我們討論一些平常遇到的、且利用簡單三角變換,很容易變到基本公式,因而不難積分的一些三角函數的微分式。

1. 求 $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$。

假若 m 及 n 之中有一個是正的奇數,同時另一個可以是任何數,則利用公式(IV):

$$\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C,$$

很容易求它的積分.

事實上,假若 $\sin x$ 的指數是奇數的話,積分可變爲下面的形式:

$$\int (\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\text{只包含 } \cos x \text{ 的諸項}}) \sin x\, dx;$$

假若 $\cos x$ 的指數是奇數,則積分可變爲:

$$\int (\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\text{只包含 } \sin x \text{ 的諸項}}) \cos x\, dx。$$

我們舉些例子來說明它:

例 1. 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$。

解 $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx =$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C。$$

例 2. 求 $\int \cos^3 x\, dx$。

解 $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x) \cos x\, dx =$

$$= \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cos x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C。$$

習 題

1. $\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$。

2. $\int \cos^3 2\theta \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{\cos^4 2\theta}{8} + C$。

3. $\int \cos^5 x\, dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C$。

4. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$。

5. $\int \frac{\sin^3 \alpha\, d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \sec \alpha + \cos \alpha + C$。

6. $\int \sin^{\frac{3}{7}} \varphi \cos^3 \varphi\, d\varphi = \frac{7}{10}\sin^{\frac{10}{7}} \varphi - \frac{7}{24}\sin^{\frac{24}{7}} \varphi + C$。

7. $\int \frac{\sin^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$。

8. $\int \frac{\cos^5 t\, dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = \frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} t \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{7}\sin^4 t\right) + C$。

2．求 $\int \tan^n x\, dx$ 或 $\int \cot^n x\, dx$。

如果 n 是整數，這種形式很容易積分，其方法與前例略同。

例 求 $\int \tan^4 x\, dx$。

解 $\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx =$

$$= \int (\tan x)^2\, d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$$

3．求 $\int \sec^n x\, dx$ 或 $\int \csc^n x\, dx$。

如果 n 是正的偶數，這種形式很容易積分。

例 求 $\int \sec^6 x\, dx$。

解 $\int \sec^6 x\, dx = \int (\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x\, dx =$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx + 2\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx =$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} + 2\frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C.$$

4．求 $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ 或 $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$。

當 n 是正的偶數時，可按例 3 的方法來積分。

例 1． 求 $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$。

解 $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x\,(\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx =$

$$= \int \tan^8 x \sec^2 x\, dx + \int \tan^6 x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

當 m 是奇數時可照下面的例子來積分。

例 2． 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$。

解 $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x\, dx =$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x\, dx =$$

$$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x)\sec x \tan x\, dx =$$

$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C.$$

習　題

1. $\int \tan^5 x\,dx=\frac{\tan^4 x}{4}-\frac{\tan^2 x}{2}+\ln\cos x+C$。

2. $\int \cot^3 x\,dx=-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\sin x+C$。

3. $\int \cot^4\frac{x}{3}\,dx=-\cot^3\frac{x}{3}+3\cot\frac{x}{3}+x+C$。

4. $\int \cot^5\alpha\,d\alpha=-\frac{1}{4}\cot^4\alpha+\frac{1}{2}\cot^2\alpha+\ln\sin\alpha+C$。

5. $\int \sec^8 x\,dx=\frac{\tan^7 x}{7}+\frac{3\tan^5 x}{5}+\tan^3 x+\tan x+C$。

6. $\int \tan^4\varphi\sec^4\varphi\,d\varphi=\frac{\tan^7\varphi}{7}+\frac{\tan^5\varphi}{5}+C$。

7. $\int \tan^3\theta\sec^5\theta\,d\theta=\frac{1}{7}\sec^7\theta-\frac{1}{5}\sec^5\theta+C$。

8. $\int \cot^5 x\csc^4 x\,dx=-\frac{\cot^6 x}{6}-\frac{\cot^8 x}{8}+C$。

9. $\int \tan^{\frac{3}{2}} x\sec^4 x\,dx=\frac{2\tan^{\frac{5}{2}} x}{5}+\frac{2\tan^{\frac{9}{2}} x}{9}+C$。

10. $\int \tan^5 y\sec^{\frac{3}{2}} y\,dy=2\sec^{\frac{3}{2}} y\left(\frac{\sec^4 y}{11}-\frac{2\sec^2 y}{7}+\frac{1}{3}\right)+C$。

11. $\int \frac{\sec^6\alpha\,d\alpha}{\tan^4\alpha}=\tan\alpha-2\cot\alpha-\frac{\cot^3\alpha}{3}+C$。

12. $\int (\tan^2 z+\tan^4 z)\,dz=\frac{1}{3}\tan^3 z+C$。

13. $\int (\tan t+\cot t)^3\,dt=\frac{1}{2}(\tan^2 t-\cot^2 t)+\ln\tan^2 t+C$。

5．當 m 及 n 之中有一個是正的奇數時，積分 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ 的最簡捷的求法，在這節的 1 中已經講過。若 m 及 n 都是正的偶數，則可用適當的三角公式，把已知微分式化爲含倍角的正弦與餘弦，然後再積分。爲了這個目的，可用下列公式：

$$\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u;$$

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2u;$$

$$\cos^2 u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2u。$$

例1. 求 $\int \cos^2 x\, dx$。

解 $\int \cos^2 x\, dx=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\mp C$。

例2. 求 $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$。

解 $\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C$。

例3. 求 $\int \sin^4 x\cos^2 x\, dx$。

解 $\int \sin^4 x\cos^2 x\, dx=\int (\sin x\cos x)^2\sin^2 x\, dx=\int \frac{1}{4}\sin^2 2x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=$

$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\, dx=$

$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\, dx=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$。

例4. 求 $\int \sin mx\cos nx\, dx$, $\int \sin mx\sin nx\, dx$

及
$$\int \cos mx\cos nx\, dx,\quad 若\quad m\neq n。$$

解 $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\sin(m+n)x+\frac{1}{2}\sin(m-n)x$。

從此

$$\int \sin mx\cos nx\, dx=\frac{1}{2}\int \sin(m+n)x\, dx+\frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\, dx=$$

$$=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C。$$

同樣,可求得:

$$\int \sin mx\sin nx\, dx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C,$$

$$\int \cos mx\cos nx\, dx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C。$$

習 題

1. $\int \sin^4 dx=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$。

2. $\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{16}\left(5x + 4\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4}\sin 4x\right) + C$。

3. $\int \sin^4 t \cos^4 t\,dt = \frac{1}{128}\left(3t - \sin 4t + \frac{\sin 8t}{8}\right) + C$。

4. $\int \cos^6 x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{128}\left(5x + \frac{8}{3}\sin^3 2x - \sin 4x - \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$。

5. $\int \sin 5z \sin 6z\,dz = -\frac{\sin 11z}{22} + \frac{\sin z}{2} + C$。

6. $\int \cos 4s \cos 7s\,ds = \frac{\sin 11s}{22} + \frac{\sin 3s}{6} + C$。

7. $\int \cos\frac{3}{4}x \sin\frac{1}{4}x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + \cos\frac{1}{2}x + C$。

§16. 利用三角函數的置換法來積分那含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 的表達式

在許多情形,積分這種式子的最簡捷的方法,就是把變量作如下的置換:

如含有$\sqrt{a^2-x^2}$, 則令 $x = a\sin z$;

如含有$\sqrt{a^2+x^2}$, 則令 $x = a\tan z$;

如含有$\sqrt{x^2-a^2}$, 則令 $x = \frac{a}{\cos z}$。

也可以分別引用下面的置換:

$$x = a\cos z,\quad x = a\cot z,\quad x = \frac{a}{\sin z}。$$

例 $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$。

解 令 $x = a\sin z$, 則 $dx = a\cos z\,dz$ 且

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{(a^2-a^2\sin^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2}\tan z + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C。$$

$$\left[因爲\ \sin z = \frac{x}{a},\ 則\ \tan z = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]。$$

§17. 關於積分答案的多重性

讀者看到,同一不定積分有各種不同的答案,而這些答案又都是同

樣正確的(就是說,好像我們有許多正確的答案似的),最初一定會很覺奇怪。但是,我們不難了解爲什麼有這個表面上的怪事。

現在舉一個簡單的例子:

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$$

另一方面:

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C_{\circ}$$

看起來,兩個答案是不同的。

事實上,答案總是相同的,表面上不同的答案,總是因這種情形下有不同的任意常量而引起的,這些任意常量雖然不同,但它們仍可用同一字母 C 來表示。

這不難由上例中看出來。實際上由三角學中,讀者知道:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x_{\circ}$$

任意常量有差別$\left(\text{這裏相差 } \frac{1}{2}\right)$,就使諸答案在表面上有差別。

讀者早在本章開始時,就已經遇到了同樣的這種情形;在那裏的基本積分表中,同時有:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_{\circ}$$

及

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C_{\circ}$$

但是從三角關係

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x \text{ 及 } \sin y = x,$$

我們知道 $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$ 及 $y = \arcsin x$,

相加之後即知: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$。

因之，我們看到，第二個答案的任意常量 C，等於第一個答案的任意常量再加上 $\frac{\pi}{2}$。

習 題

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{x} + C$。

2. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C$。

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$。

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$。

5. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3} + C$。

6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$。

§ 18. 分部積分法

如果 u 及 v 是同一自變量的函數，則按乘積的微分法公式，我們有：

$$d(uv) = u\,dv + v\,du。$$

從此：
$$u\,dv = d(uv) - v\,du。$$

積分後，得
$$\text{XXII.} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du。$$

這個公式稱為分部積分公式。

假若我們能夠將微分式 dv 及 $v\,du$ 積出來，那麼公式 XXII 就能使我們把微分式 $u\,dv$ 積出來。

這個分部積分法，是積分學中寶貴的方法。

為了把這個方法用到任何已給的情形上去，我們應該會把已給微分式分解為兩因式的乘積，亦即分解為 u 與 dv。但是很遺憾，除了下

述各點外，我們講不出什麼分解的一般法則來。

（a） dx 恆應為 dv 的一部分；

（b） 應該能夠將 dv 積出來；

（c） 當被積分式是兩個函數的乘積時，則比較複雜的因子應當作為微分 dv 的部分。

下面的例子，說明怎樣具體應用分部積分法。

例 1. 求 $\int x\cos x\,dx$。

解 設
$$u=x \quad \text{且} \quad dv=\cos x\,dx,$$
從此
$$du=dx \quad \text{且} \quad v=\int\cos x\,dx=\sin x。$$
代入 XXII，得：
$$\int\overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\cos x\,dx}^{dv}=\overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\sin x}^{v}-\int\overbrace{\sin x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}=x\sin x+\cos x+C。$$

例 2. 求 $\int x\ln x\,dx$。

解 設
$$u=\ln x \quad \text{且} \quad dv=x\,dx。$$
從此
$$du=\frac{1}{x}dx \quad \text{且} \quad v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}。$$
代入 XXII，得：
$$\int x\ln x\,dx=\ln x\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C。$$

例 3. 求 $\int xe^{ax}\,dx$。

解 設
$$u=e^{ax} \quad \text{且} \quad dv=x\,dx,$$
從此
$$du=e^{ax}\,a\,dx \quad \text{且} \quad v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}。$$
代入 XXII，得：
$$\int xe^{ax}\,dx=e^{ax}\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}e^{ax}\,a\,dx=\frac{x^2e^{ax}}{2}-\frac{a}{2}\int x^2e^{ax}\,dx。$$
但是，$x^2e^{ax}\,dx$ 比 $xe^{ax}\,dx$ 還要複雜些，這指出了：我們的因子選擇得不適當。現在另設
$$u=x \quad \text{且} \quad dv=e^{ax}\,dx,$$
從此
$$du=dx \quad \text{且} \quad v=\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}。$$
代入 XXII，求得

$$\int xe^{ax}\,dx=x\frac{e^{ax}}{a}-\int\frac{e^{ax}}{a}dx=\frac{xe^{ax}}{a}-\frac{e^{ax}}{a^2}+C=\frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)+C。$$

有時候，要應用好幾次分部積分法才積得出，如下面的例子。

例 4 求 $\int x^2e^{ax}\,dx$。

解 設 $u=x^2$ 且 $dv=e^{ax}\,dx$。

從此 $du=2x\,dx$ 且 $v=\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}$。

代入 XXII，可得：

$$\int x^2e^{ax}\,dx=x^2\frac{e^{ax}}{a}-\int\frac{e^{ax}}{a}2x\,dx=\frac{x^2e^{ax}}{a}-\frac{2}{a}\int xe^{ax}\,dx。\tag{1}$$

上式末項的積分已經在上例中用分部積分法求出來了：

$$\int xe^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)。$$

將這結果代入（1），得：

$$\int x^2e^{ax}\,dx=\frac{x^2e^{ax}}{a}-\frac{2e^{ax}}{a^2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+C=\frac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}\right)+C。$$

例 5. 證明

$$\int\sec^3 z\,dz=\frac{1}{2}\sec z\tan z+\frac{1}{2}\ln(\sec z+\tan z)+C。$$

解 設 $u=\sec z$ 且 $dv=\sec^2 z\,dz$，

則 $du=\sec z\cdot\tan z\cdot dz$ 且 $v=\tan z$。

代入 XXII，得：

$$\int\sec^3 z\,dz=\sec z\cdot\tan z-\int\sec z\cdot\tan^2 z\cdot dz。$$

以 $\tan^2 z=\sec^2 z-1$。代入新的積分中，得：

$$\int\sec^3 z\,dz=\sec z\cdot\tan z-\int\sec^3 z\,dz+\ln(\sec z+\tan z)+C。$$

將右邊的積分移到左邊去，並除以 2，即得所要求證的結果。

例 6. 證明

$$\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C。$$

解 設 $u=e^{ax}$ 且 $dv=\sin nx\,dx$，

則 $du=ae^{ax}\,dx$ 且 $v=-\frac{\cos nx}{n}$。

代入公式 XXII，得：

$$\int e^{ax}\sin nx\,dx=-\frac{e^{ax}\cos nx}{n}+\frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx\,dx。\tag{2}$$

對於新的積分再用一次分部積分法。設：

$$u=e^{ax} \quad 且 \quad dv=\cos nx\,dx。$$

則

$$du=ae^{ax}\,dx \quad 且 \quad v=\frac{\sin nx}{n}。$$

由公式 XXII，得：

$$\int e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{ax}\sin nx}{n}-\frac{a}{n}\int e^{ax}\sin x\,dx。\qquad (3)$$

方程(2)和(3)是兩個未知量的兩個聯立代數方程，這兩個未知量各是：$\int e^{ax}\sin nx\,dx$，及 $\int e^{ax}\cos nx\,dx$。對於這兩個未知量而言，方程是一次的，所以非常容易解這方程。解這聯立方程後，我們同時得到未知量 $\int e^{ax}\sin nx\,dx$ 及 $\int e^{ax}\cos nx\,dx$，後者是這個方法的"利息"或副產品，雖然我們並不需要，但是也是很有用的。

在下面各種情形時，分部積分法有最重要的應用：

(a) 微分中包含乘積；

(b) 微分中包含對數；

(c) 微分中包含反三角函數。

習 題

求出下列各積分：

1. $\int x\sin x\,dx=\sin x-x\cos x+C$。

2. $\int \ln x\,dx=x(\ln x-1)+C$。

3. $\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$。

4. $\int x\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$。

5. $\int x\sec^2 2x\,dx=\frac{1}{2}x\tan 2x+\frac{1}{4}\ln\cos 2x+C$。

6. $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$。

7. $\int x^2\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$。

8. $\int \sin x\cos 3x\,dx=\frac{1}{8}(3\sin x\sin 3x+\cos x\cos 3x)+C$。

9. $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$。

10. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$。

11. $\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$。

12. $\int \operatorname{arc\,cot} y\, dy = y \operatorname{arc\,cot} y + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$。

13. $\int \arctan \frac{x}{3} dx = x \arctan \frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln(x^2+9) + C$。

14. $\int x^3 \arctan x\, dx = \frac{1}{4}(x^4-1)\arctan x + \frac{1}{12}(3x - x^3) + C$。

15. $\int \frac{\arctan x\, dx}{x^2} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\arctan x}{x} + C$。

16. $\int \ln(1-\sqrt{x})\, dx = (x-1)\ln(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}(x+2\sqrt{x}) + C$。

17. $\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C$。

18. $\int e^t \sin t\, dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$。

19. $\int e^\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{e^\theta}{2}(\sin\theta + \cos\theta) + C$。

20. $\int \frac{\sin\Phi\, d\Phi}{e^\Phi} = -\frac{\sin\Phi + \cos\Phi}{2e^\Phi} + C$。

21. $\int e^{2t}\cos 3t\, dt = \frac{e^{2t}}{13}(3\sin 3t + 2\cos 3t) + C$。

22. $\int e^{-\theta}\sin 3\theta\, d\theta = -\frac{e^{-\theta}}{10}(\sin 3\theta + 3\cos 3\theta) + C$。

23. $\int \frac{xe^x\, dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$。

24. $\int \frac{x^2 dx}{e^x} = -\frac{x^2+2x+2}{e^x} + C$。

求下列各積分，並以微分法驗證所得結果：

25. $\int x\csc^2 3x\, dx$。

26. $\int x\cos^2\frac{x}{2} dx$。

27. $\int x^2\cos\frac{x}{2} dx$。

28. $\int \sin 3x\cos x\, dx$。

29. $\int \sin\theta\sin 3\theta\, d\theta$。

30. $\int \cos\Phi\cos 3\Phi\, d\Phi$。

31. $\int \arcsin 2x\, dx$。

32. $\int \arctan\frac{2}{x} dx$。

33. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\, dx$。

34. $\int x^2 \arcsin x\, dx$。

35. $\int \frac{x \arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$。　　　36. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^2} dx$。

37. $\int x^3 e^{2x} \, dx$。　　　38. $\int (e^x + x)^2 \, dx$。

39. $\int (2x + x^2)^2 \, dx$。　　　40. $\int e^{3t} \cos 2t \, dt$。

41. $\int e^{\frac{t}{2}} \sin 2t \, dt$。　　　42. $\int e^{2t} \cos \frac{t}{2} dt$。

43. $\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt$。　　　44. $\int e^{\frac{t}{3}} \cos t \, dt$。

45. $\int e^2 \sin t \, dt$。　　　46. $\int \cos^3 \theta \, d\theta$。

§ 19. 一個說明

整個說起來，積分法比微分法難得多。事實上像下面這種積分。

$$\int \sqrt{x} \sin x \, dx,$$

初看起來儘管很簡單，但却是不能積出來的，因爲並不存在這種初等函數（由微分表中的函數，運用有限次[1]取函數的函數所組成），其導數是等於$\sqrt{x} \sin x$的。積分計算的難處，就在於不能立刻說明哪一個積分積得出，哪個積不出。爲着幫助求積分，特別有一個積得出的積分類型的表。而且任何一大類可以積得出來的積分的發現，總是解決了很難的科學問題之後的結果。

[1] 這個次數也可以非常多，例如萬萬萬次"函數的函數"步驟。

第二章　積分常量

§20. 由初始條件決定積分常量

根據 § 2 所講，積分的結果包含一個任意常量；就是說：求所給函數的原函數時，有無窮多的答案。可是，有許多用積分法來解決的問題，只要求一個確定的原函數。因爲所有的原函數只相差一個任意常量，這就意味着：求某個確定的原函數的問題，在於決定任意常量的數值。顯然，在這種情形，我們必須知道在變量的某個數值處的積分數值，因此、這類問題的條件，除微分表達式外，尚包含一些補充的數據。我們用例子來說明。

例　函數的導數是 $3x^2-2x+5$，且當 $x=1$ 時，函數值爲 12，今求該函數。

解　$(3x^2-2x+5)dx$ 是所給的微分式，應把它積分，得：

$$\int(3x^2-2x+5)dx=x^3-x^2+5x+C。$$

式中 C 是積分常量，按問題中的條件，當 $x=1$ 時，上面的結果應等於 12，故

$$12=1-1+5+C,\quad 或\quad C=7。$$

因此，所求函數是 x^3-x^2+5x+7。

§ 21. 積分常量的幾何意義

我們舉例子來說明它。

例 1. 求一條曲線的方程，已知這條曲線在每點的斜率是 $2x$。

解　因爲曲線在任一點的切線斜率是 $\frac{dy}{dx}$，按問題的條件，故有 $\frac{dy}{dx}=2x$，或 $dy=2x\,dx$。積分後，得：

$$y=2\int x\,dx,\quad 或\quad y=x^2+C。\qquad (1)$$

其中 C 是積分常量。如果給常量 C 一列數值，例如 6，0，-3，則方程(1)給出了

$$y=x^2+6,\ y=x^2,\ y=x^2-3,$$

這就是說，這些曲線是拋物線，其軸與 OY 軸重合，而這些曲線在 OY 軸上的截距是 6，0，-3。

對於(1)式中所有的拋物線(有無窮多條)來說,在給定的 x 數值處, $\frac{dy}{dx}$ 都是相同的;就是說,它們的方向(或者它們的切線斜率),對於同一 x 數值來講,都是相同的。同時也不難看到,同一 x 數值處,任意兩條曲線的縱坐標的差是一定的。所以,把拋物線中的一條上下移動距離 C,就可以得到所有的拋物線,因為在這種情形,C 的數值不影響切線斜率(圖3)。

如果在這個例題中,添上某個條件,例如要曲線通過 $(1, 4)$ 點,則該點的坐標應適合方程(1),由此而知 $4=1+C$,或 $C=3$。因此,在這個特別情形下,所求的唯一曲線,是拋物線 $y=x^2+3$。

例 2. 一條曲線在任一點的切線斜率,等於其橫坐標與縱坐標之比的負值;求該曲線的方程。

解　這問題的條件,可以用下面的方程來表達:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}。$$

或者分離變量(擺脫分母)後,用

$$y\,dy=-x\,dx。$$

來表達。

積分後,得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C$$

即

$$x^2+y^2=2C。$$

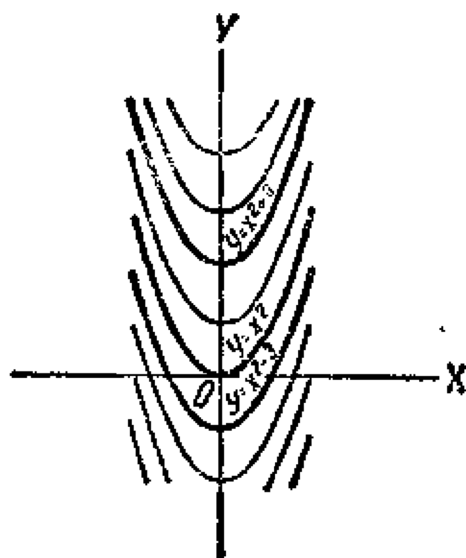


圖 3.

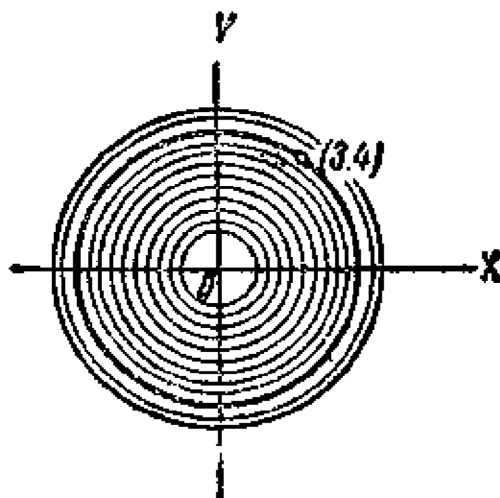


圖 4.

這個方程表示了中心在坐標原點的圓族(圖4)。

如果開頭給了一個補充條件,要曲線通過(3, 4)點,則

$$9+16=2C。$$

因此,在這個特別的情形下,所求的方程是圓 $x^2+y^2=25$。

§22. 積分常量的物理意義

我們用例子來說明。

例 1　一動點以等加速度作直線運動，求其運動規律。

解　因爲加速度 $\left[=\frac{dv}{dt}\right]$ 是常量，比方設等於 j，故

$$\frac{dv}{dt}=j,\quad \text{或}\quad dv=jdt。$$

積分後，得：

$$v=jt+C。\tag{2}$$

爲了確定 C，今設初速度爲 v_0，就是說：$t=0$ 時，$v=v_0$。代入(2)，得：

$$v_0=0+C,\quad \text{或}\quad C=v_0。$$

因此，方程(2)變爲

$$v=jt+v_0。\tag{2*}$$

因爲 $v=\frac{ds}{dt}$，故由(2*)求得

$$\frac{ds}{dt}=jt+v_0,\quad \text{或}\quad ds=jt\,dt+v_0\,dt。$$

積分後，得：

$$s=\frac{1}{2}jt^2+v_0t+C。\tag{3}$$

爲了確定 C，設出發時的位置（即 $t=0$ 時的距離）爲 s_0，亦卽設 $t=0$ 時 $s=s_0$。代入(3)中，得：

$$s_0=0+0+C,\quad \text{或}\quad C=s_0。$$

因此方程(3)取得下面的形式：

$$s=\frac{1}{3}jt^2+v_0t+s_0。\tag{3*}$$

若令 $j=g$，$v_0=0$，$s_0=0$，$s=h$，則由(2*)與(3*)得到眞空中自由落體的運動規律，即

$$v=gt\quad \text{及}\quad h=\frac{1}{2}gt^2。$$

例 2. 質點以初速度 v_0 拋射出去，v_0 與水平綫的交角爲 α；如不計空氣阻力，試研究其運動。

解　設運動在 XOY 平面中進行（圖 5），又假定：開始時，該質點在坐標原點。

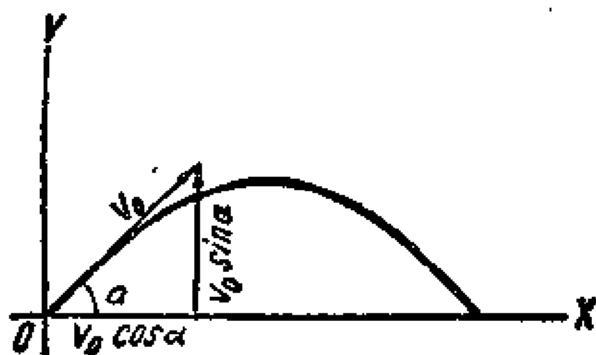


圖 5.

假設作用在質點上的，只有地心吸力，

則水平方向的加速度是零，垂直方向的是 g。

按第一册 § 113，公式（5），得

$$\frac{dv_x}{dt}=0 \quad 及 \quad \frac{dv_y}{dt}=-g。$$

積分後，得：　　$v_x=C_1$　及　$v_y=-gt+C_2$。

但初速度的水平與垂直分量各爲 $v_0\cos\alpha$ 與 $v_0\sin\alpha$，故（設 $t=0$）

$$C_1=v_0\cos\alpha,\ C_2=v_0\sin\alpha。$$

由此

$$v_x=v_0\cos\alpha,\ v_y=-gt+v_0\sin\alpha。\tag{4}$$

再按第一册 § 112，公式（2）與（3），我們有：

$$v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt};$$

隨之，（4）給出了：　$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha$。

或　　$dx=v_0\cos\alpha\,dt,\ dy=-gt\,dt+v_0\sin\alpha\,dt$。

積分後，得：

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t+C_3,\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\cdot t+C_4。\tag{5}$$

爲了確定 C_3 與 C_4，我們注意，當 $t=0$ 時，$x=0$，$y=0$。代入方程（5），得 $C_3=0$，$C_4=0$；故得：

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\cdot t。$$

這兩個方程定出了質點在坐標軸上的射影的運動規律。從幾何觀點來看，它們整個是運動軌道的參量方程。從這兩個方程消去參量 t（時間）即得，

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}。$$

這就是笛氏坐標形式的軌道方程，它表示了質點的軌道是一條拋物線。

習　題

1．求函數，其一階導數各等於：

（a）$3+x-5x^2$，又 $x=6$ 時，函數 $=-200$。　　答　$124+3x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3$。

（b）y^3-b^2y，又 $y=2$ 時，函數等於零。　　答　$\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{2}b^2y^2+2b^2-4$。

（c）$\sin\alpha+\cos\alpha$，又 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 時，函數等於 2。　　答　$\sin\alpha-\cos\alpha+1$。

（d）$\frac{1}{t}-\frac{1}{2-t}$，又 $t=1$ 時，函數等於零。　　答　$\ln(2t-t^2)$。

(e) $\sec^2\theta+\tan\theta$，又 $\theta=0$ 時，函數等於 5。　　答 $\tan\theta-\ln\cos\theta+5$。

2．求曲線方程，其次法距爲常數且等於 $2a$。$\left[\text{按第一册 § 77．次法距}=y\frac{dy}{dx}\right]$。

答 拋物線 $y^2=4ax+C$。

3．求曲線方程，其次切距是常數，且等於 a，$\left[\text{按第一册 § 77．次切距}=y\frac{dx}{dy}\right]$。

答 曲線 $a\ln y=x+C$。

4．求曲線方程，其次法距等於切點之縱坐標。　　答 $y^2-x^2=C$，等邊雙曲線。

5．求曲線，其法線長爲常數 $(=R)$，又設 $y=R$ 時，$x=0$。$\left[\text{按第一册 § 77．法線長等於 } y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\text{，故在這種情形，}dx=\pm(R^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}ydy\right]$。　　答 圓 $x^2+y^2=R^2$。

6．求曲線，其次切距爲切點橫坐標的兩倍。　　答 $x^2=cy^3$。

7．試證明，極次切距爲常量的曲線，是雙曲螺線[第一册 § 115]。

8．試證明，極次法距爲常量的曲線，是阿基米得螺線。

9．求曲線，其極次法距正比於矢徑長。　　答 $\rho=ce^{a\theta}$。

10．求曲線，其極次法距正比於極角的正弦。　　答 $\rho=c-a\cos\theta$。

11．求曲線，其極次切距正比於矢徑長。　　答 $\rho=ce^{a\theta}$。

12．求曲線，其極次切距正比於極次法距。　　答 $\rho=ce^{a\theta}$。

13．求曲線的方程，其矢徑和切線所成的角，爲極角的一半。$\left[\text{以 }\psi\text{ 表示矢徑和切線之間的角，則 }\tan\psi=\rho:\frac{d\rho}{d\theta}\right]$。　　答 $\rho=c(1-\cos\theta)$。

14．設 $t=0$ 時，速度 $v=v_0$，若已知加速度爲：

(a) 零，(b) 常數 j，(c) $a+bt$，試求 v 和 t 之間的關係。　　答 (a) $v=v_0$；(b) $v=v_0+jt$；(c) $v=v_0+at+\frac{1}{2}bt^2$。

15．設 $t=0$ 時 $s=0$，求 s 與 t 之間的關係，已知速度等於：

(a) 常量 a_0，(b) $m+nt$，(c) $3+2t-3t^2$。

答 (a) $s=v_0t$；(b) $s=mt+\frac{1}{2}nt^2$；(c) $s=3t+t^2-t^3$。

16．一物體由靜止開始運動，在 t 秒末，其速度爲 $5t^2$ 米/秒；今問過了三秒後，它離出發點多遠？(b) 它需多少時間才走了 360 米遠(離出發點)？　答 (a) 45 米；(b) 6 秒。

17．一物體由 O 點出發，t 秒末，它在 OX 方向的速度等於 $12t$，在 OY 軸方向的速度等於 $4t^2-9$，求它沿各坐標軸平行方向所走的距離與軌道方程。

答 $x=6t$；$y=\frac{4}{3}t^3-9t$；$y=\left(\frac{2}{9}x-9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}$。

18．一物體運動，其在 OX 與 OY 軸的速度，各爲 kx 與 $-ky$。證明：其軌道是等邊雙曲線。

第三章 定積分

§23. 定積分的概念

讀者必須溫習第一章第三、四、五各節。在那裏我們關於定積分已作了詳細的說明，這裏只簡短地提一下要點。

第一、每個連續函數 $\Phi(x)$，都具有原函數 $f(x)$；就是說，具有這種函數 $f(x)$，把它微分後即得 $\Phi(x)$：$f'(x)=\Phi(x)$。儘管我們並不總求得出這個原函數，儘管這個原函數甚至也不是總能用初等函數表示出來的❶；但是不管怎樣，它總是存在的。

第二、每個連續函數 $\Phi(x)$ 不只有一個原函數 $f(x)$，而有無窮多個原函數；並且所有這些原函數之間，只相差一個常量。

第三、當自變量從數值 a 變到數值 b 時，不管對哪一個原函數說，所得的函數增量 $f(b)-f(a)$ 都是相同的；就是說，這時每個原函數所得的增量都是一個常量，完全與所取的原函數 $f(x)$ 無關，而只依賴於導數 $\Phi(x)$ 本身以及 a 與 b 的數值。

對於所有原函數都相同的這個原函數的增量 $f(b)-f(a)$，稱爲**定積分**。

我們曾用記號 I_a^b 暫時表示過定積分；不要忘記，定積分只是一個數。

§24. 定積分的理論計算法

定積分 I_a^b 既然依賴於導數 $\Phi(x)$ 及數 a, b，那末就應當可用某種方法，從 $\Phi(x)$ 及 a, b 算出 I_a^b 來。這個計算法，我們已經寫爲求定積分的四步一般法則：

---

❶ 甚至於極其簡單的函數 $\Phi(x)$，例如 e^{x^2}, $\sqrt{x}\sin x$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ 等等，它們的原函數也是不能用任何初等函數表示出來的。

第一步　把線段 $[a, b]$ 分爲 n 個小線段，其長（依照從 a 點到 b 點的次序）各爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$。

第二步　在這些小線段上，各任取一點 $\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$。

第三步　對於每一個小線段，作乘積 $\Phi(\xi_i^*)\,\Delta x_i$，這就是導數 $\Phi(x)$ 在該小線段上所選擇的點 ξ_i^* 處的數值 $\Phi(\xi_i^*)$ 跟該小段的長 Δx_i 相乘；然後把所得這些乘積加起來：

$$\Phi(\xi_0^*)\,\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\,\Delta x_1+\Phi(\xi_2^*)\,\Delta x_2+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\,\Delta x_{n-1}。$$

第四步　令 n 無窮增加，同時令 Δx_i 中的最長者趨近於零，求上面所作和的極限。這個極限，就是所要求的定積分 I_a^b。

§25. 定積分的實際計算法

定積分計算法的上述形式，只在純理論上有意義，實際上是不能那樣做出來的。因爲，除了三四種極少有的情形外，我們不會求上述那種和的極限。因此，實際上我們恰好是反過來做的。在實際計算定積分時，我們根本不必取什麼極限。

定積分的實際計算法則如下：

第一步　求所給導數 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$。這就是求不定積分 $\int\Phi(x)dx$，一般說來，這並不要取極限，因爲這可用套公式的方法，或者甚至於用純代數的方法來做。

第二步　求到了不定積分 $\int\Phi(x)dx$ 後，這就是說，求到了 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$ 後，作差 $f(b)-f(a)$。

這個差 $f(b)-f(a)$ 就是定積分 I_a^b，也就是和式 $\Phi(\xi_0^*)\,\Delta x_0+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$ 的極限。要得出這個極限，一般說來並沒有其他的方法。

§26. 定積分的記號

把定積分 I_a^b 當作“和”

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$$

的極限，雖然沒有直接計算這個極限的任何方法，因而不得不滿足於用那不是總能積得出來的不定積分 $\int\Phi(x)dx$ 這種間接的方法，然而討論上述和的極限，還是一件極重要的事，這首先是爲了要把定積分應用到自然科學上去，其次是爲了要求定積分的近似值。

因此，我們先來給定積分 I_a^b 弄一個恰當的記號。

讀者已經知道，$\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$ 等點，可在基本線段$[a, b]$所劃分出來的 n 個小線段上任意選擇。因此，我們可把這些點取爲劃分線段$[a, b]$時所用的 n 個分點 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，並且爲了使記號一致起見，我們設 $a=x_0$，$b=x_n$。在這種情形下，上面的和可寫爲

$$\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}。$$

這個和通常縮寫爲：

$$\mathop{S}_{x_i=a}^{x_i=b}\Phi(x_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Phi(x_i)\Delta x_i$ 是和式中的一般項，當和式中所有的項一個一個寫出來時，其中的 x_i 點從 $x_0=a$ 取起，一直取到極其接近於 $x_n=b$ 點的最後一點 x_{n-1}。因此，上面的有限和(通常稱爲積分和)可寫爲：

$$\mathop{S}_{a}^{b}\Phi(x_i)\Delta x_i \text{ 或甚至寫爲 } \mathop{S}_{a}^{b}\Phi(x)\Delta x$$

在這個記號裏，我們默認，在和式記號 S 之後的字母 x，並不是連續取得線段$[a, b]$上的所有點的，而只取得那把$[a, b]$分爲許多小線段時所用的分點。這種分點，共有 n 個，從 x_0 開始。

作爲有限和 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 的極限的那個定積分 I_a^b 的記號是

$$\int_a^b\Phi(x)dx,$$

並讀爲："定積分，從 a 到 b，$\Phi(x)dx$"。

必須一再指出，定積分 $I_a^b=\int_a^b \Phi(x)dx$ 絕不是什麼"和"，而只是和的極限：

$$\int_a^b \Phi(x)dx=\lim \mathop{S}_a^b \Phi(x)\Delta x。$$

§27. 萊博尼茲-牛頓的基本公式及其應用時的條件

從上面所講定積分 $I_a^b=\int_a^b \Phi(x)dx$ 的數值等於 $f(b)-f(a)$，所以有萊博尼茲-牛頓的基本公式：

$$\text{XXIII. } \int_a^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a)。$$

這個公式可以敍述爲：

在線段 $[a, b]$ 上連續的函數 $\Phi(x)$ 的定積分，等於 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$ 在該線段 $[a, b]$ 端點處的數值的差 $f(b)-f(a)$。

在實際計算定積分時，我們常引用一個記號，這就是，有了含變量 x 的表達式 $F(x)$ 之後，把那常要遇到的差 $F(b)-F(a)$ 縮寫爲 $[F(x)]_a^b$。

這樣，我們就有

$$[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)。$$

因之，萊博尼茲-牛頓公式現在可以寫爲

$$\text{XXIII*. } \int_a^b \Phi(x)dx=\left[\int \Phi(x)dx\right]_a^b=[f(x)]_a^b,$$

這個記號，正是在實際計算中常用到的。

我們注意：在計算定積分時，不必爲那個任意常量的選擇來操心；因隨便那個任意常量，在相減時總會自動對消的。

例 1. 求 $\int_1^4 x^2dx$。

解 $\int_1^4 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$。

例 2. 求 $\int_0^\pi \sin x\,dx$。

解 $\int_0^\pi \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=[-(-1)]-(-1)=2$。

例 3. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$。

解 $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}=\Big[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big]_0^a=\frac{1}{a}\arctan 1-\frac{1}{a}\arctan 0=\frac{\pi}{4a}-0=\frac{\pi}{4a}$。

例 4. 求 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}=-\frac{1}{12}\ln 5=-0.134\cdots$

解 從 XVII 或 XVIII*, $v=2x$, $a=3$, $dv=2dx$。

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}=\frac{1}{12}\Big[\ln\frac{2x-3}{2x+3}\Big]_{-1}^0 \qquad \text{從 XVII}$$

又

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}=-\int_{-1}^0 \frac{dx}{9-4x^2}=-\frac{1}{12}\Big[\ln\frac{3+2x}{3-2x}\Big]_{-1}^0 \qquad \text{從 XVII*}$$

我們應該用第二個算式，而不用第一個，因爲第一式中出現了負數的對數。應用公式 XIIV*，卽得答案。

在萊博尼茲-牛頓公式這個最重要的公式中，有一個很重要的假定，就是函數 $\Phi(x)$ 是假定在整個線段 $[a, b]$ 上連續，沒有任何古裏古怪的情形，特別是沒有任何跑到無窮遠處的點；一般說來，也沒有任何間斷點。

假若忽略了這件事，一下就用上了萊博尼茲-牛頓公式，粗心大意地做起來，那末，在純粹技術問題中，很容易導到極錯誤的結果，得到不正確的數字。

犯這種錯誤的例子 讀者想計算定積分 $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$，但沒有注意到，被積分函數 $\Phi(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ 在線段 $[1, 3]$ 上有變爲無窮大的地方。因爲當 $x\to 2$ 時顯然 $\Phi(x)\to\infty$。他打算應用萊博尼茲-牛頓公式，寫出不定積分 $\int\frac{dx}{(x-2)^2}$，求得它爲 $\frac{1}{2-x}+C$。最後就設 $f(x)=\frac{1}{2-x}$，寫出：

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}=f(3)-f(1)=\frac{1}{2-3}-\frac{1}{2-1}=-1-1=-2。$$

顯然，這是錯誤的；因爲被積分函數 $\Phi(x)$ 在積分線段上處處是正的，所以，"積分和" $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$，在 $a<b$ 的條件下，應爲正數，這說明"積分和"

的極限應爲正數或等於零。等於負數是絕不可能的❶。

這個錯誤的原因，在於濫用萊博尼茲-牛頓公式。因爲在這個公式中，我們恆要假定函數 $\Phi(x)$ 在線段$[a, b]$上是連續的。

§26. 定積分與不定積分的關係

若已知不定積分 $\int \Phi(x)dx=f(x)+C$, 那末在任意上下限 b 與 a 之間的定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$ 的數值就很容易求。萊博尼茲-牛頓公式就告訴我們這個數值的求法：

$$\text{XXIII.}\quad \int_a^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a)。$$

反過來說，若在任意上下限 b 與 a 之間的定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$ 的數值爲已知，則也不難從同一萊博尼茲-牛頓公式求得不定積分 $\int \Phi(x)dx$。

事實上，我們要是用別的字母如 t，來表示定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$ 中的積分變量，則可把萊博尼茲-牛頓公式寫爲：

$$\int_a^b \Phi(t)dt=f(b)-f(a)。$$

再用 x 代字母 b，得

$$\int_a^x \Phi(t)dt=f(x)-f(a)。\tag{1}$$

若把下限 a 當作常量，把上限 x 當作自變量，我們就看到：等式(1)右邊的第一項，就是被積分函數 $\Phi(x)$ 的原函數，因爲我們有：

$$\frac{df(x)}{dx}=\Phi(x),\tag{2}$$

---

❶ 在 $x=2$ 處應用幾何級數之和的公式 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3\cdots+x^n+\cdots$ 時，也會產生這種錯誤。這個公式在 $x=2$ 處是不正確的，因 $x=2$ 時我們得到：

$$-1=1+2+4+8+16\cdots$$

而正數之和是不可能等於負數的。

故將等式(I)的兩邊對 x 微分，即得

$$\text{XXIV.}\quad \frac{d}{dx}\int_a^x \Phi(t)dt=\Phi(x)。$$

由此，顯然可知，把 $\int_a^x \Phi(t)dt$ 加上一個任意常量 C 之後，即得函數 $\Phi(x)$ 的不定積分，亦即我們有等式：

$$\text{XXV.}\quad \int \Phi(x)dx=\int_a^x \Phi(t)dt+C。$$

這個值得注意的公式，可以敍述爲：

不定積分，等於以變量爲上限以常量爲下限的定積分，與附加的任意常量之和。

§29. 定積分與不定積分中的積分變量

在定積分與不定積分

$$\int_a^b \Phi(x)dx \text{ 及 } \int \Phi(x)dx$$

中，積分號後的字母 x 都稱爲積分變量。但是，在這兩個積分中，它的作用是不同的。

在定積分中，數值結果與積分變量毫無關係。因爲定積分中的字母 x 純粹是輔助性質的，有如我們求整數和 $\sum_{i=1}^{i=100} i=1+2+3+\cdots+100=5050$ 時字母 i 的作用一樣。定積分是一個數，它並不依賴於積分變量。因此，定積分中的積分變量可以用任意的字母表示。這樣，我們就有：

$$\int_a^b \Phi(x)dx=\int_a^b \Phi(t)dt=\int_a^b \Phi(z)dz \text{ 等等。}$$

在不定積分中，積分變量同時又是積分後所得函數的自變量。因此，不定積分中的積分變量是不能隨便用各種不同字母來表示的，否則就會得到不同的結果，也就是，會得到不同的自變量的函數。例如：

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C,\ \int \cos t\,dt=\sin t+C\text{。}$$

$$\int \cos z\,dz=\sin z+C\text{。}$$

§30. 積分上下限的對調

因爲：
$$\int_a^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a),$$

及
$$\int_b^a \Phi(x)dx=f(a)-f(b)=-[f(b)-f(a)]\text{。}$$

故得：
$$\int_a^b \Phi(x)dx=-\int_b^a \Phi(x)dx\text{。}$$

用話來表達，則爲：將積分上下限對調，相當於改變定積分的正負號。

§31. 積分線段的分割

設在線段$[a, b]$上，我們積分某個連續函數$\Phi(x)$。又設：這個線段$[a, b]$，被其內部某個點c分爲兩個小線段$[a, c]$及$[c, b]$。

我們有：

$$\int_a^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a),\ \int_a^c \Phi(x)dx=f(c)-f(a),$$

及

$$\int_c^b \Phi(x)dx=f(b)-f(c)\text{。} \tag{1}$$

將末後兩個等式加起來，得

$$\int_a^c \Phi(x)dx+\int_c^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a)\text{。} \tag{2}$$

故：

$$\int_a^b \Phi(x)dx=\int_a^c \Phi(x)dx+\int_c^b \Phi(x)dx\text{。} \tag{3}$$

用話來說：

若積分線段 $[a,b]$ 分為幾個小線段，則在整個線段上的積分，等於在各個小線段上的積分之和❶。

§32. 定積分的兩個最簡單的性質

1. 函數和的定積分，等於各函數的定積分之和。

證明 因我們有：

$$\int (u+v-w)dx=\int u\,dx+\int v\,dx-\int w\,dx,$$

由此得：

$$\left[\int (u+v-w)dx\right]_a^b=\left[\int u\,dx+\int v\,dx-\int w\,dx\right]_a^b=$$

$$=\left[\int u\,dx\right]_a^b+\left[\int v\,dx\right]_a^b-\left[\int w\,dx\right]_a^b。$$

又因為我們恆有：

$$\text{XXIII}^*.\quad \int_a^b \Phi(x)dx=\left[\int \Phi(x)dx\right]_a^b,$$

故得：

$$\int_a^b (u+v-w)dx=\int_a^b u\,dx+\int_a^b v\,dx-\int_a^b w\,dx。$$

2. 常數因子可以從定積分號內拿出來，放在積分號前。

證明 我們有：

$$\int Au\,dx=A\int u\,dx,\text{ 其中 } A \text{ 為常數。}$$

由此得：

$$\left[\int Au\,dx\right]_a^b=\left[A\int u\,dx\right]_a^b=A\cdot\left[\int u\,dx\right]_a^b。$$

根據 XXIII*，得知：

$$\int_a^b Au\,dx=A\int_a^b u\,dx。$$

---

❶ 要注意，公式(3)纔是成立的。甚至於當 c 點雖非位於積分上下限之間時，它還是成立的。因為在這種情形下，等式(1)與(2)依然成立，隨之，由它們導出的等式(3)也成立。

§33. 定積分的分部積分法

我們有：$(uv)'=uv'+u'v$，由此：

$$\int_a^b (uv'+u'v)dx=[uv]_a^b。$$

故
$$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx。$$

又因 $v'dx=dv$，$u'dx=du$，故最後得

$$\text{XXVI.}\quad \int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du。$$

這就是定積分的分部積分法。

"譯者註：在上面最後一個公式中，定積分 $\int_a^b u\,dv$ 及 $\int_a^b v\,du$ 的寫法容易引起誤會，上下限是變量 x 的上下限，並不是變量 v 及 u 的，所以有人寫爲

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv \text{ 及 } \int_{x=a}^{x=b} v\,du，\text{或} \int_{v(a)}^{v(b)} u\,dv \text{ 及 } \int_{u(a)}^{u(b)} v\,du。$$

在後面的一種寫法裏，$v(a)$ 及 $v(b)$ 表示了函數 $v(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 的數值。"

§34. 定積分的變量置換法則

用這個法則時需要謹慎和小心。

設 $f(x)$ 在線段間 $[a, b]$ 上連續。

假定
$$x=\varphi(t),$$

其中函數 $\varphi(t)$ 適合下列條件：

第一　函數 $\varphi(t)$ 在線段 $[t_1, t_2]$ 上，具有連續導數 $\varphi'(t)$；

第二　在線段 $[t_1, t_2]$ 上函數 $\varphi(t)$ 的數值，不超出線段 $[A, B]$。

以 a 及 b 表示函數 $\varphi(t)$ 在線段 $[t_1, t_2]$ 兩端點處的數值，即設

$$a=\varphi(t_1),\ b=\varphi(t_2)。$$

對於在線段$[t_1, t_2]$上具有上述性質的函數$\varphi(t)$，我們有下面的公式

$$\text{XXVII.}\ \int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt。$$

這個公式表達了定積分在積分變量置換時的重要變換法則。

這個法則的證明如下：

讓我們看變量t的兩個函數：

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx \text{ 及 } \int_{t_1}^{t} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)dz。$$

並求這兩個函數對於變量t的導數。第一個函數的導數應按函數之函數的微分法求出，因為這函數可寫為：

$$\int_a^x f(y)dy, \text{ 而 } x=\varphi(t)。$$

對t微分後，得

$$\frac{d\int_a^x f(y)dy}{dt}=\frac{d\int_a^x f(y)dy}{dx}\frac{dx}{dt}[\text{按 XXVI}]=$$

$$=f(x)\frac{dx}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)。$$

將第二個函數對t微分，直接由公式 XXIV 可得：

$$\frac{d}{dt}\int_{t_1}^{t} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)dz=f[\varphi(t)]\varphi'(t)。$$

因此，這兩個函數的導數，在線段$[t_1, t_2]$上各處都是相等的。這意味着，在這個線段上，兩函數只相差一個常量C_0。

就是說，在線段上我們有恆等式：

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx=\int_{t_1}^{t} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)dz+C_0。\qquad (1)$$

為求常量C_0，可設$t=t_1$，於是有

$$\int_a^{\varphi(t_1)} f(x)dx=\int_{t_1}^{t_1} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)dz+C_0,$$

可是 $\varphi(t_1)=a$。又因爲上下限相等時，定積分恆等於零，故得：

$$\int_a^{\varphi(t_1)} f(x)dx=0,\quad \int_{t_1}^{t_1} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)\cdot dz=0。$$

由此，上述等式可寫爲：$0=0+C_0$，這就是說：常量 $C_0=0$。因此，代替了(1)式，在 $[t_1, t_2]$ 上我們有恆等式：

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx=\int_{t_1}^{t} f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)dz,$$

設 $t=t_2$。記住 $\varphi(t_2)=b$，故最後得到：

$$\text{XXVII.}\quad \int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt。$$

這就是定積分的變量置換法則。

爲了要用話把這個法則敍述出來，我們記住：

$$\varphi'(t)dt=d\varphi(t)。$$

因此，等式 XXVII 的右邊可寫爲：

$$\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]d\varphi(t)。$$

最後，由於在置換時，我們曾用一個字母 x 表示函數 $\varphi(t)$

$$x=\varphi(t),$$

故可將等式 XXVII 右邊索性寫爲 $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$。因此，整個等式 XXVII 可寫爲：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx。\tag{2}$$

這裏要小心了。在這個等式的左邊，積分變量是字母 x；因此，左邊定積分號的積分上下限，就是該積分變量 x 的界限。在該等式的右邊，積分變量根本不是變量 x，而是變量 t，因爲字母 x 在這裏表示了 t 的函數 $x=\varphi(t)$；因此，右邊定積分號的上下限，是新的積分變量 t 的界限。

這樣，表達了定積分變量置換法則 XXVII 之要點的等式(2)，應

當敍述為:

算定積分時的上下限,總應該是那個選為眞正的積分變量的界限。

例 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$。因為 $\int\cos x\,dx=\sin x+C$,故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-$ $-0=1$。假若我們以 $x=t^2$ 代入,並注意到 $dx=2t\,dt$,定積分 $\int_{t_1}^{t_2}2t\cos t^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ 之上下限 t_2, t_1,應取得使 $0=t_1^2$ 及 $\frac{\pi}{2}=t_2^2$;亦卽使得 $t_1=0$ 及 $t_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。因此就有等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\int_0^{+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}2t\cos t^2dt\ ❶,$$

習 題

利用所給置換,求下列各積分:

1. $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=4-2\ln 3$。 設 $\sqrt{x}=z$。
2. $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}$。 設 $x=az$。
3. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$。 設 $\sqrt{1-x^2}=z$。
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha=\frac{1}{3}$。 設 $\sin\alpha=z$。
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)d\theta}{3+\sin 2\theta}=\frac{\ln 3}{4}$。 設 $\sin\theta-\cos\theta=z$。
6. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\arctan e-\frac{\pi}{4}$。 設 $e^x=z$。

---

❶ 在用置換 $x=\varphi(t)$ 來積分時,應注意上下限 t_1 及 t_0 是否虛數。這件事從例子上就可看出來。例如:我們顯然有:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2,\ 因為\int\cos x\,dx=\sin x+C,\ 故$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=1-(-1)=2。$$

但是在作置換 $x=t^2$ 時,可得關於上下限 t_1 及 t_0 的兩個等式: $-\frac{\pi}{2}=t_0^2$, $+\frac{\pi}{2}=t_1^2$。這時,t_0 得到的是虛數,因為 t_0 的實數的平方是正的而不可能是負的。為避免這種誤會起見,應當先看一看,要使得極限 a 及 b 對應一個實的線段 $[t_0,t_1]$ 的端點 t_0 及 t_1。

7. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\pi$。 設 $x=a\sin^2 z$。

8. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}=8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$。 設 $x-2=z^3$。

9. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=4-\pi$。 設 $e^x-1=z^2$。

10. $\int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{2+4y}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。 設 $2+4y=z$。

11. $\int_0^\pi \frac{dt}{3+2\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$。 設 $\tan\frac{t}{2}=z$。

12. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx=\frac{4-\pi}{2}$。 設 $e^x-1=z^2$。

13. $\int_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\frac{\pi a^4}{16}$。 設 $y=a\sin z$。

驗證下列各積分:

14. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2$。

15. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx=\frac{16}{3}$。

16. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{98}{3}$。

17. $\int_0^3 \sqrt{25-3x}\,dx=\frac{122}{9}$。

18. $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{5-t}}=2$。

19. $\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx=\frac{a^2}{6}$。

20. $\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy=\frac{52}{9}$。

21. $\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx=10+\frac{9}{2}\ln 3$。

22. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$。

23. $\int_0^1 \frac{dx}{9x^2+6x+1}=\frac{1}{4}$。

24. $\int_0^1 te^t\,dt=1$。

25. $\int_0^\pi e^\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}(e^\pi+1)$。

26. $\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}=\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$。

27. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{3}+\frac{\ln 3}{4}$。

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=0.429\cdots$。

29. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$。

30. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$。

31. $\int_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}=4\pi$。

求下列各定積分:

32. $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$。

33. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$。

34. $\int_0^1 \sin\pi\theta\,d\theta$。

35. $\int_0^\pi \sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$。

36. $\int_0^4 \frac{x\,dx}{x^2+2}$。　　37. $\int_0^{\pi} \tan^2\frac{\theta}{3}d\theta$。

38. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$。　　39. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-4x^2}}$。

40. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$。　　41. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$。

§35. 中值定理

設 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是連續的。又設 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的原函數，$f'(x)=\Phi(x)$。

我們有：

$$\int_a^b \Phi(x)dx=f(b)-f(a)。\tag{1}$$

寫出微分學內的中值定理(亦即拉格蘭日"有限增量"定理)，可得：

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)=(b-a)\Phi(c),\tag{2}$$

其中 c 是介於 a 及 b 之間的數。

比較(1)及(2)，得

$$\int_a^b \Phi(x)dx=(b-a)\Phi(c)。\tag{3}$$

這就是積分學的中值定理。在這裏，$\Phi(c)$是函數在積分線段 $[a, b]$ 上的最大與最小值之間的數，因此，由(3)式可得

$$(b-a)m\leqslant\int_a^b \Phi(x)dx\leqslant(b-a)M。\tag{4}$$

數值

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx。\tag{5}$$

常稱爲函數 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上的中值(或平均值)。

事實上，由等式(3)，數值(5)等於所給連續函數在某個中間點 $c\,(a<c<b)$ 的數值，亦卽等於數值 $\Phi(c)$。

§36. 定積分作爲面積

我們來討論連續函數 $\Phi(x)$，並設

$$y=\Phi(x)。$$

這是某條曲線 AB（圖 6）的方程

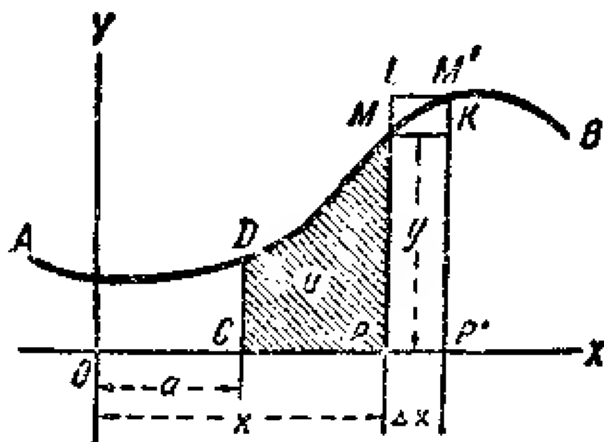


圖 6.

設 CD 爲固定的縱坐標，而 PM 是移動的。用 u 表示 $CPMD$ 的面積。當 x 得到增量 Δx 時，u 就得到增量 Δu（$=PP'M'M$ 的面積）。作內接矩形 $PP'KM$ 及外接矩形 $PP'M'L$，我們看到：

$$PP'KM \text{ 的面積} < PP'M'M \text{ 的面積} < PP'M'L \text{ 的面積},$$

或

$$PM\cdot\Delta x<\Delta u<P'M'\cdot\Delta x。$$

由此，以 Δx 除之，得❶：

$$PM<\frac{\Delta u}{\Delta x}<P'M'。$$

現在設 Δx 趨近於零，則動的縱坐標 $P'M'$ 趨近於固定縱坐標 PM，以之爲極限（因爲 y 是 x 的連續函數）。因此，我們得到：

$$\frac{du}{dx}=y(=PM),$$

或，寫爲微分：

$$du=y\,dx=\Phi(x)dx。$$

我們得到下述定理：

定理 由曲線、橫坐標軸、固定縱坐標與變動的縱坐標所圍成的面積的微分，等於變動的縱坐標與其對應橫坐標的微分兩者之乘積。

由這個定理可知：所論可變面積 $u=CPMD$ 是函數 $\Phi(x)$ 的某個原

---

❶ 圖中 PM 比 $P'M'$ 小。如果 PM 比 $P'M'$ 大，則上面不等式中的 < 號應改爲 > 號。

函數，因此我們若將 $\Phi(x)$ 的不定積分寫爲

$$\int \Phi(x)dx=f(x)+C,$$

我們應得：

$$CPMD=u=f(x)+C_0。 \qquad (1)$$

其中 C_0 爲任意常量 C 的某個完全確定的數值。

爲求數 C_0，只須注意：若令 $x=a$ 時，$CPMD$ 的面積就等於零。因此，在等式(1)中，令變量 x 等於 a，卽得：

$$0=f(a)+C_0。$$

就是說，$C_0=-f(a)$。因此，等式(1)應改寫爲：

$$CPMD=f(x)-f(a)。 \qquad (2)$$

假若我們要用這個方法來求曲線 $y=\Phi(x)$ 的一塊完全確定的面積 $CEFD$（圖7），則只要在等式(2)中，令 $x=b$。

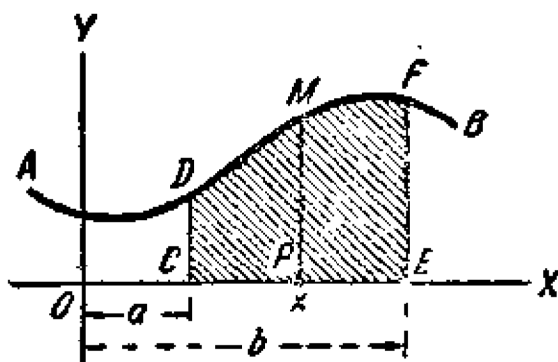


圖 7.

這就得到：

$$CEFD\text{ 的面積}=f(b)-f(a)。$$

但因爲定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$ 是正好等於 $f(b)-f(a)$ 的，所以最後我們得公式：

$$CEFD\text{ 的面積}=\int_a^b \Phi(x)dx。 \qquad (3)$$

用話來說就是：

連續函數 $\Phi(x)$ 的定積分 $\int_a^b \Phi(x)dx$，數值上等於由曲線 $y=\Phi(x)$、橫坐標軸 OX、及兩根縱坐標 $x=a$ 和 $x=b$ 所圍成的面積。

〔註〕 常常有人不正確地看待問題，說：“定積分是面積”。這是不對的。因爲定積分首先是一個數，而不是什麼幾何形象。至於，怎樣解釋這個數，這就要看別的情況來定了，也就是要看那用橫坐標及縱坐標所表示的量的意義是：幾何意義，或力學意義，或物理意義等來定了。

例如,當 x 及 y 只當作平面上點的坐標時,那末定積分 $\int_a^b y\,dx$ 眞的就是面積。

但是,假若 x 是時間, $\Phi(x)$ 是動點的運動速度, 則曲線 $y=\Phi(x)$ 是運動的速度圖線,而曲線下介於兩個縱坐標之間的面積表示了在其相應時間內,動點所通過的距離。因此,在這種情形,定積分 $\int_a^b y\,dx$ (按它的本質,是個抽象的數),在數值上等於所通過的距離。它並不表示面積,而表示了動點軌道的長度。同樣,我們把給出體積、曲面面積、質量、力等等的定積分,在幾何上總表示爲面積的形式。

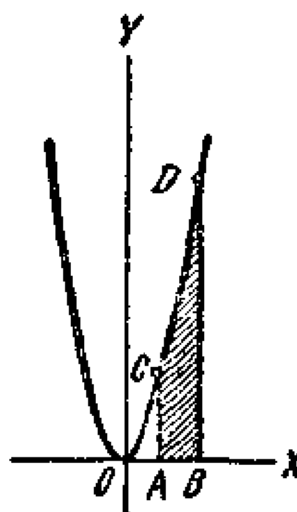


圖 8.

在基本公式:

$$\text{面積}=\int_a^b y\,dx$$

中假定了:曲線 $y=\Phi(x)$ 確實是包圍着面積的。這表明這條曲線不會跑到無窮遠去,而且兩個橫坐標,a 與 b,都是有限的。

例 1. 求拋物線 $y=x^2$、OX 軸、直線 $x=2$ 及 $x=4$ 所圍成的面積(圖 8)。

解 利用前述公式,得

$$ABDC\ \text{的面積}=\int_2^4 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}。$$

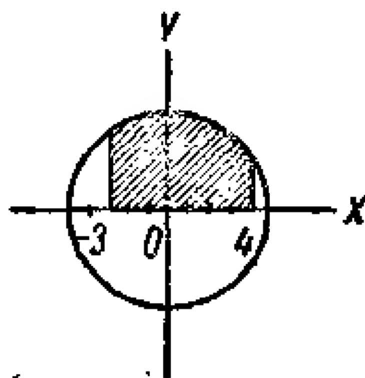


圖 9.

例 2. 求圓 $x^2+y^2=25$、OX 軸、縱坐標 $x=-3$ 及 $x=4$ 所圍成的面積(圖 9)。

解 $y=\sqrt{25-x^2}$。由此,得

$$\text{面積}=\int_{-3}^{4}\sqrt{25-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}\right]_{-3}^{4}\qquad(\text{按 XX})$$

$$=6+\frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5}+6-\frac{25}{2}\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=31.6\cdots$$

試把這答案跟半圓的面積 $\frac{1}{2}\pi\cdot 25=39.6\cdots$ 相比較

§37. 用參量方程表示的曲線下的面積

設所給曲線方程的形式爲

$$x=\varphi(t)、\ y=\psi(t)。$$

由此而有 $y=\psi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$。故有:

$$面積=\int_a^b y\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt。\qquad (1)$$

其中，當 $x=a$ 時，$t=t_1$；又當 $x=b$ 時，$t=t_2$。

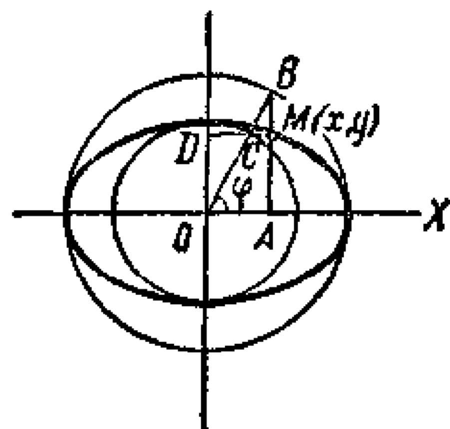


圖 10.

例 求橢圓之面積，其參量方程爲：

$x=a\cos\varphi$ 及 $y=b\sin\varphi$ (圖 10)。

解 這裏 $y=b\sin\varphi$，$dx=-a\sin\varphi\,d\varphi$。

當 $x=0$ 時，$\varphi=\frac{\pi}{2}$；又當 $x=a$ 時，$\varphi=0$。代入方程(1)中，求得橢圓在第一象限中的面積爲：

$$面積=\int_0^a y\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi ab}{4},$$

$$\left[因爲\ \sin^2\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]。$$

由此而知，整個橢圓的面積爲 πab

§38. 近似積分法問題

假若不可能算出積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的準確數值，則可用近似積分法。因爲每一個定積分都可以在幾何上表示爲平面曲線的面積，所以積分的近似計算問題，就變成面積的近似度量問題。

§39. 梯形法

爲曲線 $y=f(x)$ 所圍成的面積，可以用一些內接梯形面積之和來代替，而達到足夠的準確度。將 OX 軸上從 $x=a$ 到 $x=b$ 的線段分爲 n 等分，以 Δx 表示每一小線段之長（圖 11）。因爲梯形面積等於兩底和的一半與高的乘積，故得：

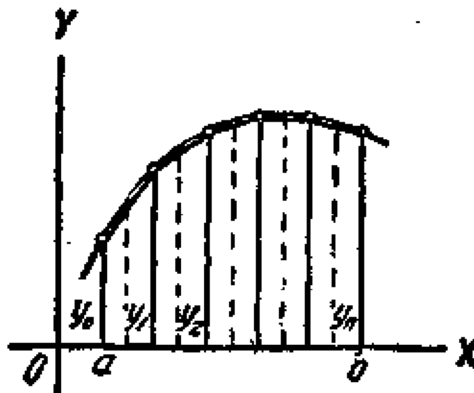


圖 11.

$$第一梯形面積=\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x,$$

$$第二梯形面積=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x,$$

………………………………………

第 n 梯形面積 $=\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$,

把這些梯形面積加起來，得：

$$各梯形面積之和=\frac{1}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)\Delta x,$$

梯形法就在於：我們認爲所求的面積 S，近似的等於各梯形面積之和：

$$S=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\Delta x。\qquad (1)$$

顯然，假若我們把橫坐標軸上的區間 (a, b) 分爲個數愈多的小分段，則諸梯形面積之總和，愈能準確表示由曲線所圍成的所求面積。

例　用梯形法求 $\int_1^{12} x^2 dx$。

解　將 OX 軸上從 $x=1$ 到 $x=12$ 的線段分爲 11 等分。我們有：

$$\frac{b-a}{n}=\frac{12-1}{11}=1=\Delta x。$$

所求的面積係由曲線 $y=x^2$ 所圍成。以橫坐標 $x=1, 2, 3, \cdots, 12$，代入方程中，求得其對應的縱坐標爲 $y=1, 4, 9, \cdots, 144$。因此，按公式(1)，得：

$$S=\left(\frac{1}{2}+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+\frac{1}{2}\cdot 144\right)\cdot 1=577\frac{1}{2}。$$

利用積分法算出的同一面積爲：

$$\int_1^{12} x^2 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{12}=575\frac{2}{3}。$$

因之，在這個情形下，梯形法則只給出百分之三的誤差。

§40. 辛濮松法(拋物線型公式)

除了將曲線的分點連之以弦，而以諸梯形面積的和來代替所求面積外，還可以過曲線上的分點作拋物線弧，用這些弧段與對應於分點的縱坐標所圍成的面積之和，代替所求面積，得到更好的近似值。過曲線上任意三點，可以引一條拋物線（具有垂直的軸）。這一系列的拋物線弧段，比起那用弦連接曲線上相鄰點所作成的折線來，還要與曲線接近

些。

現在將 OX 軸上從 $x=a=OP_0$ 到 $x=b=OP_n$ 的線段分為偶數 (n) 個小線段，每段長各為 Δx。通過每組相鄰接的三點 M_0, M_1, M_2, M_3, M_4; …，各引一條具有垂直軸的拋物線弧（圖 12）。這樣便得到：拋物線梯形面積＝梯形面積 $P_0M_0M_2P_2$＋拋物線弓形面積 $M_0M_1M_2$；梯形面積 $P_0M_0M_2P_2$ $=\frac{1}{2}(y_0+y_2)\cdot 2\Delta x=(y_0+y_2)\Delta x$，拋物線弓形面積 $M_0M_1M_2$ ＝ 三分之二個平行四邊形面積 $M_0M_0'M_2'M_2=$
$=\frac{2}{3}\left[y_1-\frac{1}{2}(y_0+y_2)\right]2\Delta x=\frac{2}{3}(2y_1-y_0-y_2)\Delta x$。因此，

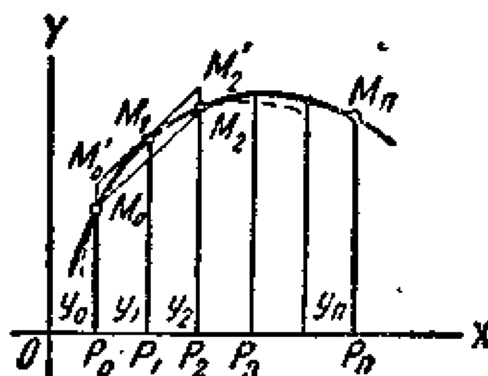


圖 12.

第一個拋物線梯形面積 $P_0M_0M_1M_2P_2=$

$$=(y_0+y_2)\Delta x+\frac{2}{3}(2y_1-y_0-y_2)\Delta x=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

同樣：

第二個拋物線梯形面積 $=\frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4)$,

第三個拋物線梯形面積 $=\frac{\Delta x}{3}(y_4+4y_5+y_6)$,

……………………………………………………

最後一個拋物線梯形面積 $=\frac{\Delta x}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$,

把所有這些拋物線梯形面積加起來，得：

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)。$$

因之，得到辛浦松公式（n 為偶數）：

$$\text{所求面積}=S=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+y_n)。\quad (11)$$

像梯形法則一樣，分點 n 取得愈多，則結果愈接近於所求面積。

例 按辛浦松法求積分 $\int_0^{10} x^3\,dx$。

解 將 $x=0$ 至 $x=10$ 分爲 10 等分，得：

$$\frac{b-a}{n}=\frac{10-0}{10}=1=\Delta x。$$

所求面積是在曲線 $y=x^3$ 之下的。以橫坐標 $x=0, 1, 2, \cdots, 10$，各值代入方程中，得其相應之縱坐標爲 $y=0, 1, 8, 27, \cdots, 1000$，因此按公式(11)，得：

$$S=\frac{1}{3}(0+4+16+108+128+500+432+1372+1024+2916+1000)=2500$$

用積分法求出同一結果：

$$S=\int_0^{10} x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=2500。$$

不難證明，這種符合不是偶然的。辛浦松公式的一個性質是：它對於所有這種函數 $f(x)$：

$$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$

都給出準確的結果。

習　題

1. 以梯形法，將區間分爲 10 等分，求上面的例題中的積分。　　答　2525。

2. 以上述兩法，將區間分爲 12 等分，求積分 $\int_1^5 \frac{dx}{x}$。

　　答　按梯形法 1.6182；按辛浦松法 1.6098。

3. 以上述兩法，求 $\int_1^{11} x^3\,dx$ (設 $n=10$)。

　　答　按梯形法 3690；按辛浦松法 3660。

4. 以上述兩法，求 $\int_1^{10} \lg_{10} x\,dx$ (設 $n=10$)。

　　答　按梯形法 6.0656；按辛浦松法 6.0896。

5. 以上述兩法計算 $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ (設 $n=6$)。

　　答　按梯形法 1.0885；按辛浦松法 1.0906。

§41　上下限爲無窮大的積分

到現在爲止，積分上下限總假定是有限數；可是，甚至於在初等問題中，常常要放棄這種限制，而要討論具有無窮大上下限的積分。在某

些情況下，這是可能的，只要我們引用下述定義。

假若上限是無窮大，則我們認爲（定義）：

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\varphi(x)dx,$$

當下限爲無窮大的時候，則認爲（定義）

$$\int_{-\infty}^b\varphi(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b\varphi(x)dx,$$

但是，我們須先假定：這些極限是存在的。

例1. 求$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$。

解 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right]=1$。

例2. 求$\int_0^{+\infty}\frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}$。

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}=\lim_{b\to+\infty}\left[4a^2\arctan\frac{x}{2a}\right]_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[4a^2\arctan\frac{b}{2a}\right]=4a^2\frac{\pi}{2}=2\pi a^2。$$

我們用幾何來解釋這個結果。表達這個函數的曲線是箕舌線，其方程爲：

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}。$$

故 面積 $OABb=\int_0^b\frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}=4a^2\arctan\frac{b}{2a}$。

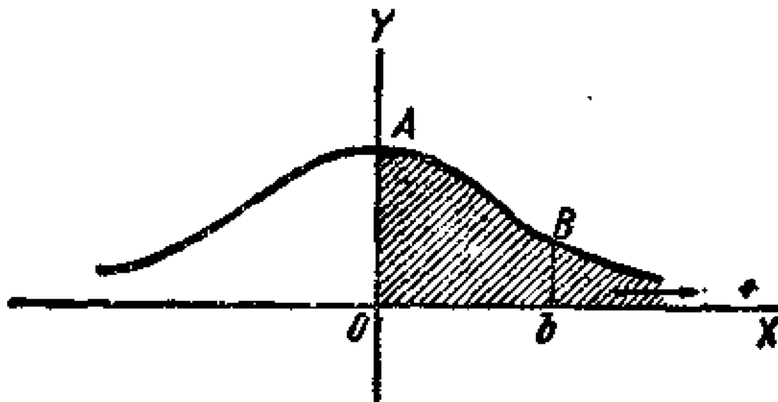


圖 18.

當縱坐標 Bb 無限向右方移動時，上面等式的右邊恆是有限量，且趨近於一定的極限：

$$\lim_{b\to+\infty}\left[4a^2\arctan\frac{b}{2a}\right]=2\pi a^2。$$

在這種情形，以及其他所有類似的情形，使得我們把取極限的結果，稱爲曲線的面積。

例3. 求 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$。

解 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b)$。

但是當 b 無限增大時，$\ln b$ 的極限並不存在。因此，在這種情形，積分沒有意義；隨之，曲線 $y=\frac{1}{x}$（雙曲線）沒有相應的面積。

§42. 間斷（跑向無窮大）函數的積分

現在我們討論一種情形：被積分函數，在其變量位於積分上下限之間的個別數值處，具有間斷性。

首先討論這種情形：被積分函數，在上下限 a 及 b 之間，除 $x=a$ 之外的一切 x 值處，都是連續的。

若 $a<b$，ε 爲正數，則我們取積分的定義爲：

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b\varphi(x)dx。\qquad(1)$$

若 $\varphi(x)$ 對於除 $x=b$ 之外的一切 x 值處，都是連續的，則取積分的定義爲：

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}\varphi(x)dx。\qquad(2)$$

但是須先假定：當 $\varepsilon\to0$ 時，這些極限是存在的。

例1. 求 $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解 在這裏，當 $x=a$ 時，$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 變到無窮大。隨之，按公式（2）

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right]=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}。$$

例2. 求 $\int_0^1\frac{dx}{x}$。

解 這裏，當 $x=0$ 時，$\frac{1}{x}$ 變到無窮大。隨之，按公式（1）

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)。$$

在這種情形,極限並不存在,因之,積分亦不存在。

假若 c 在 a 及 b 之間,又函數 $\varphi(x)$ 在 a, b 之間的所有數值處(除 $x=c$),都是連續的,則我們設 ε 及 ε' 爲二正數,然後按下面的公式,來定義 a 與 b 之間的積分:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon}\varphi(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^b \varphi(x)dx。\qquad (3)$$

但須先假定:每個個別的極限都是存在的。

例 3. 求 $\int_0^{3a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$

解 在這裏,被積分函數,當 $x=a$ 時,變到無窮大,亦即在積分上下限 0 與 $3a$ 之間的 x 數值處,變到無窮大;因此須用定義(3),故

$$\int_0^{3a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{a+\varepsilon'}^{3a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}\right]_{a+\varepsilon'}^{3a} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}\right] + \lim_{\varepsilon'\to 0}\left[3\sqrt[3]{8a^2}-3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2}\right] =$$

$$= 3a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{2}{3}} = 9a^{\frac{2}{3}}。$$

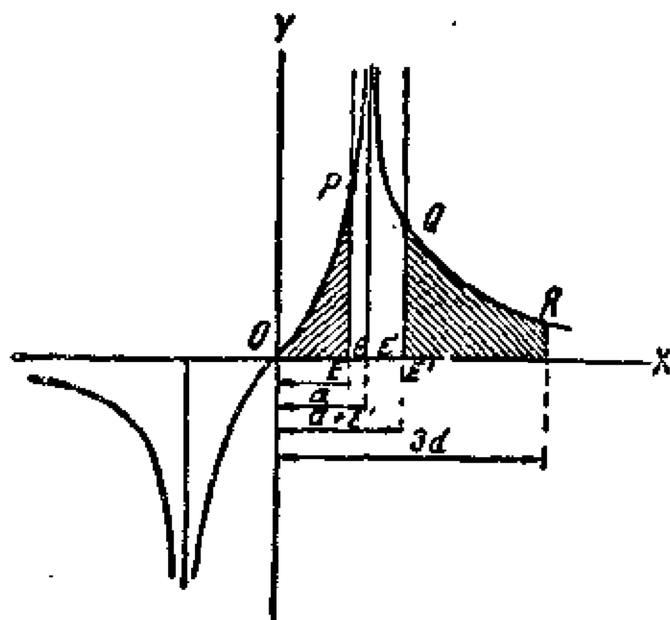


圖 14.

爲了要用幾何來說明這個結果,我們討論曲線:

$$y = \frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}。$$

(圖 14) 直線 $x=a$ 是其漸近線。

$$\text{面積 } OPE = \int_0^{a-\varepsilon}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= 3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}。$$

當縱坐標 EP 向右方移動接近漸近線時(亦卽 ε 趨近零),這個等式的右邊保持爲有限數,並趨近於一定的極限:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}\right] = 3a^{\frac{2}{3}}。$$

如同前節中一樣，這個取極限的結果 $3a^{\frac{4}{3}}$，也算是由曲線 OP、漸近線及 OX 軸所圍成的面積。

同樣，

$$E'QRG\text{ 的面積}=\int_{a+\varepsilon'}^{3a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}=3\sqrt[3]{8a^2}-3\sqrt[3]{(a-\varepsilon')^2-a^2}。$$

當縱坐標 $E'Q$ 向左邊接近於漸近線時（亦即 ε' 趨近於零），這個等式右邊爲有限量，趨近於一定的極限 $6a^{\frac{2}{3}}$，這個極限，就取爲在曲線 QR、漸近線、縱坐標 $x=3a$ 及 OX 軸之間的面積。兩個結果之總和 $9a^{\frac{2}{3}}$，就算作是在曲線縱坐標 $x=3a$ 及 OX 軸之間的面積。

例 4.　求 $\int_0^{2a}\frac{dx}{(x-a)^2}$，$a>0$。

解　這個函數，也是在積分上下限之間變到無窮大的；因之，我們應用定義（3），得：

$$\int_0^{2a}\frac{dx}{(x-a)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{(x-a)^2}+\lim_{\varepsilon'\to0}\int_{a+\varepsilon'}^{2a}\frac{dx}{(x-a)^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{a-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon'\to0}\left[-\frac{1}{x-a}\right]_{a+\varepsilon'}^{2a}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{a}\right)+\lim_{\varepsilon'\to0}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)。$$

在這種情形，極限不存在，故積分沒有意義。

把函數的曲線畫出來（圖 15），並注意兩個極限，我們就可發現：這個例子表面上很有相似於上例的情形，可是在這個例子中，我們不可能給陰影部分（圖 15）作出像上例中那種面積值的概念，因爲在這種情形下，積分沒有意義。

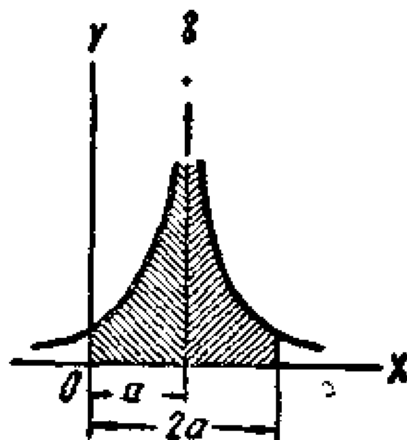


圖 15.

在積分時，須研究所給函數是否會在積分上下限之間變到無窮大。如果事先不作任何研究，便貿然把積分法公式套到上面的例子中去，那就立刻可以看出，不作這種研究會得出如何荒謬的結果。因爲那樣我們就得到：

$$\int_0^{2a}\frac{dx}{(x-a)^2}=\left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{2a}=-\frac{2}{a}，$$

這個結果顯然是荒謬的，因爲被積分函數是一個正數。

習 題

1. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}$。

2. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2}$。

3. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3}$。

4. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$。

5. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x)^n}=\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ $(n>1)$。

6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\pi$。

7. $\int_2^3\frac{3x\,dx}{2\sqrt[4]{x^2-4}}=\sqrt[4]{125}$。

8. $\int_0^{2r}\frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}dx=4r$。

9. $\int_0^r\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{\pi r}{2}$。

10. $\int_0^1\ln y\,dy=-1$。

11. $\int_0^1 x^2\ln x\,dx=-\frac{1}{9}$。

12. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)^2}=\ln 2-\frac{1}{2}$。

第四章　積分法作爲求和法．積分的應用

§43．引言

到現在爲止，我們把積分法當作反微分法。可用這只是事情的一面。它的另一面，也就是積分學在幾何、力學以及一般所有自然科學上應用時無比重要的一面，就是：**求無限增加個無窮減小着的諸項之和的極限時**，積分學提供了我們一個極有效的方法。自然科學界中，早在牛頓之前，就有人打算把自然科學中的問題化爲求這種和的極限問題。在牛頓之後，這種意圖才終於定了型，鞏固起來而且系統化起來了。這樣，積分學的產生，甚至比微分學還早一些。從這個觀點說來，積分學是一種求和法的形式，而不是反微分法了。

可是，積分學的這兩面是彼此密切關連着的；如果不用微分法，單純作爲求和法的積分學就沒有什麼價值。事實上，這個求和法並不是直接的，而是間接的。到現在爲止，我們還不會用直接法求出這種和的極限[1]。但只要我們會解決反微分法的問題，也就是，只要求得出不定積分 $\int \Phi(x)dx$，那末求和問題就馬上獲得解決；因爲，當 $n\to\infty$ 且所有的 $\Delta x_i\to 0$ 時，“和”

$$\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x)_1\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}\ (\text{其中 } x_0=a,\ x_n=b)$$

的極限等於

$$\left[\int \Phi(x)dx\right]_a^b。$$

因此，積分學之所以成爲極有用的學問，完全在於它能使我們不必取什麼極限，卽能求不定積分 $\int \Phi(x)\,dx$ 。由於這個緣故，初學者才需

---

[1] 只有在兩三個少見的情形下，才可以不必知道對應的不定積分，而求得出常數上下限之間的定積分。

要化那麼多的功夫，來學習用各種方法求不定積分的技巧❶。但這以後，讀者就應學習如何把所求得的不定積分，應用到那在幾何、力學及一般任何自然科學上許多問題中所必需解決的，無窮多個無限減小着的量的求和法上去。

§44. 積分學應用的一般程序

把積分學應用到各門自然科學，如：幾何、力學、物理、化學、生物學的問題上去時，總是按同一程序來做的，下面就是這個程序。

假若我們要定出某個量 V，我們就把它分爲很多的小份：

$$V=\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu,$$

並設法把這個和的一般項寫爲一個乘積

$$\Phi(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1}$$

的形式，其中 $\Phi(x)$ 是已知的連續函數，不過在綫段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的自變量 ξ_{i-1} 的數值，我們是不知道的。如果辦到了這件事，得出一個等式：

$$V=\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\Phi(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

其中 $x_0=a$，$x_n=b$，那末我們就取極限，這一下就把那未知的 ξ_0，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-1} 的影響除去，把所求量 V 表達爲定積分：

$$V=\lim[\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}]=\int_a^b \Phi(x)dx。$$

如果我們能夠求出不定積分 $\int \Phi(x)dx$，我們就可以不必取什麼極限，而用萊博尼茲-牛頓公式來計算我們所求的量 V：

$$V=\left[\int \Phi(x)dx\right]_a^b。$$

我們要知道，積分和 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 中

---

❶ 現在所知道的一部分不定積分，牛頓已能用直覺方法求得。求不定積分的系統化的條例，是萊博尼茲搞的。彼得堡院士歐拉把這種求法的系統性弄到高度完善的地步。在歐拉之後得出的新的不定積分，才不過寥寥幾個。俄國數學家契伯雪夫指出：歐拉的研究在某些方面已不能再有進展，因爲在許多情形下，不定積分是不能用初等函數來表達的。

的一般項 $\Phi(x_{i-1})\Delta x_{i-1}$，我們常常只寫爲 $\Phi(x)\Delta x$，甚或寫爲 $\Phi(x)dx$❶，並把它稱爲量 V 的"元素"。

按上述程序，積分的應用法則應分爲下列三個步驟：

第一步 把所求量 V 分爲無限個任意小的小份。

第二步 求這些小份的表達式，使它們的和 V 具有下列形式。

$$\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}。$$

第三步 定出適當的下限 $x=a$ 及上限 $x=b$ 之後，寫出極限

$$\lim\left[\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}\right]=\int_a^b\Phi(x)dx。$$

再根據萊博尼茲-牛頓公式算出定積分：

$$\int_a^b\Phi(x)dx=\left[\int\Phi(x)dx\right]_a^b。$$

§45. 直角坐標中平面曲線的面積

積分應用的一般程序，可以拿一個最清楚的例子來說明，這個例子就是平面曲線圍線值 V 的準確求法。

設我們欲求，由連續曲線 $y=\Phi(x)$ 和橫坐標軸 OX 及在 $x=a$ 及 $x=b$ 處的兩根縱坐標所圍成的準確面積 V（圖 16）。

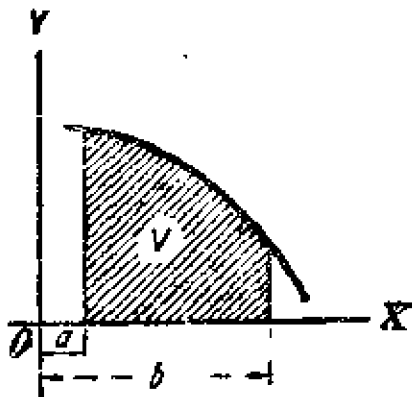


圖 16.

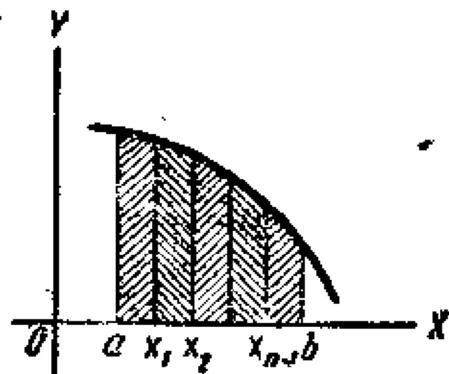


圖 17.

第一步 把線段 $[a, b]$ 分爲 n 個小線段，在分點處作縱坐標。這

❶ 對我們來說，寫 Δx 或 dx 完全沒有分別，因爲如果字母 x 表示自變量，則 $\Delta x=dx$。

標，我們就把所求面積 V 分爲 n 個各豎在每一小線段上的細條面積了。所分的這些小線段的長各記爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$（圖 17）。

第二步 豎在小線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的一條面積，顯然是介於內接及外切二矩形面積之間的，而這兩個內接及外切的矩形都豎在同一線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 之上，其高各爲最小及最大的縱坐標。由此可知，所論這一條以曲線爲頂的面積，正好會等於豎立在同一線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的某一個矩形面積的；這個矩形的高，是曲線上某點的縱坐標 $\Phi(\xi_i)$，它介於線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的最大與最小縱坐標之間，也就是線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上某一未知點 ξ_i 處曲線的縱坐標。因此，豎在線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的曲線面積，是恰好等於 $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$ 的；這就是說，我們有（圖 18）：

$$V=\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}\text{。}$$

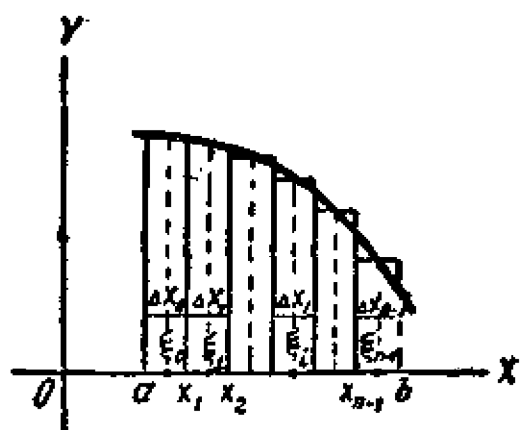


圖 18.

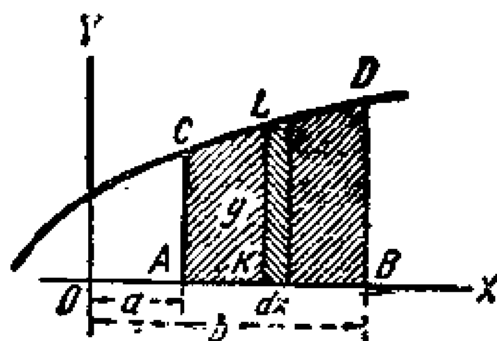


圖 19.

第三步 取極限，得

$$V=\lim[\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}]=\int_a^b \Phi(x)dx\text{。}$$

因此，

$$\text{面積}=\int_a^b y\,dx\text{。} \qquad (1)$$

這個公式是很容易記住的，只要我們在思想裏，自覺的接受一種馬虎的想法，把積分設想作是面積元素（即像圖 19 中 KL 這種矩形的面積，其高爲 y，底爲 dx）之和（而不把它看作事實上的和的極限）。

§46　導出公式時的簡化法

上節所講的積分應用法則中，最難的是第二步。它要求嚴格證明：所求量 V 的第 i 個小份，是剛好等於乘積 $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$ 的。有時這個證明是很麻煩的。因此，當事情本身是顯而易見時，把所求量 V 分爲小份後，我們就不再證明其第 i 份是剛好等於 $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$ 的。我們只取 $\Phi(x_i)\Delta x_i$ 這種乘積之和 $\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$，並根據直覺❶來斷定：若所有的 Δx_i 愈小，這個和就愈接近於 V；在取極限時，和 $\overset{b}{\underset{a}{S}}\Phi(x_i)\Delta x_i$ 就變得等於 V。

舉一個例子，我們取曲線 $x=\Phi(y)$ 和縱坐標軸 OY 及兩條水平線 $y=c$, $y=d$ 所圍成的面積 V。

第一步　作 n 個矩形，如圖 20 所示。當矩形數目無限增加，同時每個矩形的高趨於零時，所求面積 V "顯然" 等於這些矩形面積之和的極限。

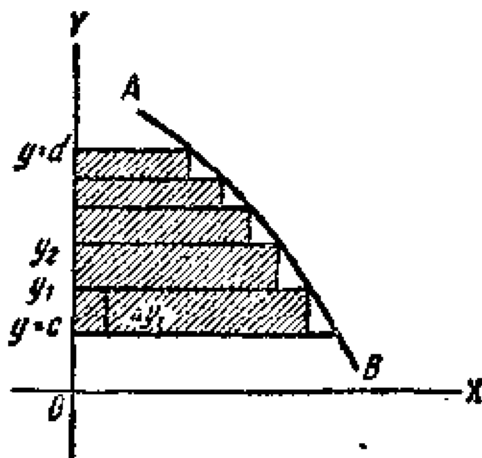


圖 20.

第二步　用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 表示各矩形的上底到 OX 軸的距離，並用 $\Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_n$ 各表示其高。我們看到，這些矩形的上底各等於 $\Phi(y_1)$, $\Phi(y_2), \cdots, \Phi(y_n)$。

因此，第 i 個矩形的面積是 $\Phi(y_i)\Delta y_i$，這些矩形面積的和是 $\Phi(y_1)\Delta y_1+\Phi(y_2)\Delta y_2+\cdots+\Phi(y_n)\Delta y_n$。

第三步　取極限，得

$$V=\lim[\Phi(y_1)\Delta y_1+\Phi(y_2)\Delta y_2+\cdots+\Phi(y_n)\Delta y_n]=\int_a^b\Phi(y)dy。$$

❶ 爲了避免用直覺，常用所謂積分原理，根據這個原理，我們在求無窮小之和時，就可以忽略掉均勻高級的無窮小，而不影響最後結果的正確性。關於這點可參閱 §55。

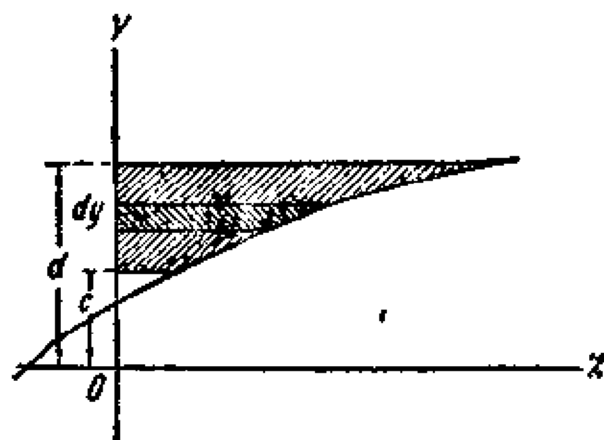


圖 21.

因之，

$$面積=\int_c^d x\,dy。\qquad (2)$$

這個公式是非常容易記憶的，只要我們自覺的接受一種馬虎（不合法）的想法：把積分當作面積元素 $x\,dy$（亦即以 dy 爲高，x 爲底的矩形之面積）之和（圖 21）。

§47. 面積的負號的意義

在公式

$$面積=\int_a^b y\,dx \qquad (1)$$

中，我們假設了 $a<b$。因爲右邊的定積分爲和 $y_0\Delta x_0+y_1\Delta x_1+\cdots+y_{n-1}\Delta x_{n-1}$ 的極限，故若 y 爲負值時，每個乘積 $y_i\Delta x_i$ 均爲負值。因此，在這種情形，公式（1）給出了帶有負號的面積。可是這只不過表示面積在 OX 軸之下罷了。

例 1. 求正弦 $y=\sin x$ 一個波的面積(圖 22)。

解 當 $x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$ 時，$\sin x=0$。故

$$面積\ OAB=\int_a^b y\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=2,$$

$$面積\ BCD=\int_a^b y\,dx=\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx=-2。$$

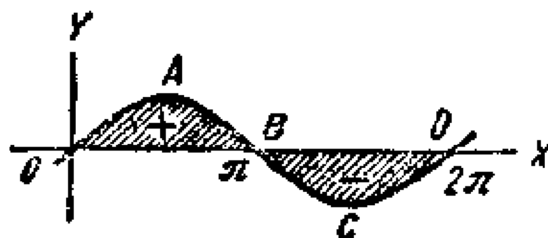


圖 22.

例 2. 試求由半立方拋物線 $ay^2=x^3$ 和 OY 軸及二直線 $y=a,\ y=2a$ 所圍成的面積(圖 23)。

解 面積元素 $=x\,dy=a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\,dy$。

由此

$$面積\ BMNC=\int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\,dy=\frac{3}{5}a^2(\sqrt[3]{32}-1)=1.304\cdots a^2。$$

我們注意：面積 $OLMB=a^2$。

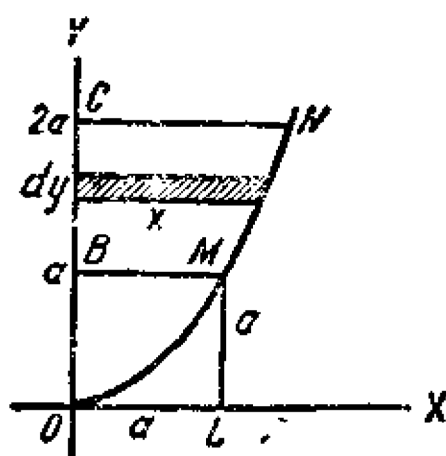


圖 23.

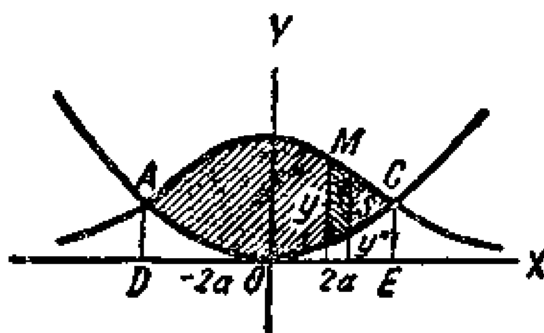


圖 24.

例3. 試求位於拋物線 $x^2=4ay$ 及箕舌線 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ $(a>0)$ (圖 24)之間的面積。

解 爲決定積分的上下限,我們聯立起來解二曲線的方程以求其交點。今求得其交點爲 $A(-2a, a)$ 及 $C(2a, a)$。

由圖 24 顯見:

$$\text{面積 } AOCB=\text{面積 } DECBA-\text{面積 } DECOA。$$

但
$$\text{面積 } DECBA=2\times\text{面積 } OECB=2\int_0^{2a}\frac{8a^3\,dx}{x^2+4a^2}=2\pi a^2,$$

$$\text{面積 } DECOA=2\times\text{面積 } OEC=2\int_0^{2a}\frac{x^2}{4a}dx=\frac{4}{3}a^2。$$

因此
$$\text{面積 } AOCB=2\pi a^2-\frac{4}{3}a^2=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)。$$

解這問題時,也可以用另外的方法,把長條 MS 作爲面積元素。以 y^* 及 y^{**} 各表示箕舌線及拋物線的縱坐標,則面積 MS 的微分表達式爲: $(y^*-y^{**})dx$ 。由所給方程中把 y^* 及 y^{**} 解出爲 x 的函數代入此式中,即得:

$$\text{面積 } AOCB=2\times\text{面積 } OCB=2\int_0^{2a}(y^*-y^{**})dx=$$

$$=2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)。$$

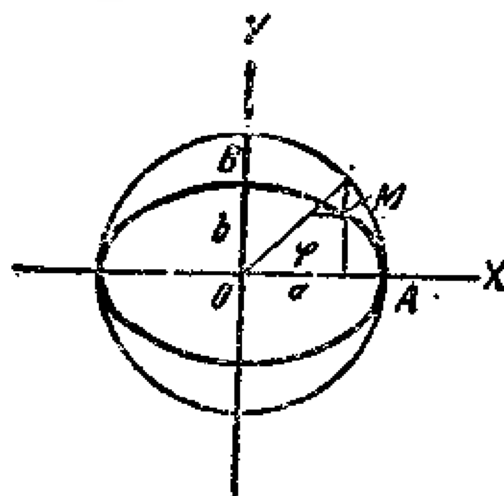


圖 25.

例 4. 求橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的面積。

今求第一象限中橢圓的面積,即四分之一個橢圓的面積 OAB (圖 25)。上下限各爲 $x=0$, $x=a$,

又 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$。代入(1)得：

$$\text{面積 } OAB=\frac{b}{a}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{bx}{2a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{ab}{2}\arc\sin\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{\pi ab}{4}。$$

故整個橢圓的面積為 πab。

習　題

1．試求由直線 $y=5x$、OX 軸及縱坐標 $x=2$ 所圍成的面積。　　答　10。

2．試求由拋物線 $y^2=4x$、橫坐標軸 OX、及直線 $x=4$，$x=9$ 所圍成的面積。

答　$25\frac{1}{3}$。

3．求二曲線 $y^2=9x$ 及 $y=3x$ 所圍成的圖形之面積。　　答　0.5。

4．試求由等邊雙曲線 $xy=a^2$、OX 軸及二縱坐標 $x=a$，$x=2a$ 所圍成的面積。

答　$a^2\ln 2$。

5．求曲線 $y=4-x^2$ 與 OX 軸之間的面積。　　答　$10\frac{2}{3}$。

6．求半立方拋物線 $y^2=x^3$、OY 軸及直線 $y=4$ 所圍成的面積。　　答　$\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}$。

7．求內擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所圍成的面積。　　答　$\frac{3}{8}\pi a^2$。

8．求曲線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$，$OX$ 軸及 OY 軸和 $x=a$ 所圍成的面積。

答　$\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$。

9．求曲線 $y=x^3$、直線 $y=8$ 及 OY 軸所圍成的面積。　　答　12。

10．求曲線 $y=\ln x$、OX 軸、及二縱坐標 $x=1$ 和 $x=a$ 所圍成的面積。

答　$a(\ln a-1)+1$。

11．求曲線$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 所圍成的全部面積。　　答　$\frac{3\pi ab}{8}$。

12．求曲線 $a^2y^2=x^3(2a-x)$ 所圍成的全部面積。　　答　πa^2。

13．求曲線 $x(y-e^x)=\sin x$ 及 $2xy=2\sin x+x^3$、OY 軸及縱坐標 $x=1$ 所圍成的圖形的面積。　　答　$\int_0^1\left(e^x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=e-\frac{7}{6}=1.552$。

14．求箕舌線 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 與其漸近線 OX 軸之間的面積。　　答　$4\pi a^2$。

15．求蔓葉線 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 與其漸近線 $x=2a$ 之間的面積。　　答　$3\pi a^2$。

16．求二拋物線 $y^2=2px$ 及 $x^2=2py$ 之間的面積。　　答　$\frac{4}{3}p^2$。

17．求拋物線 $y^2=2x$ 與圓 $y^2=4x-x^2$ 之間的面積。　　答　$2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)=0.9499\cdots$。

18．求等邊雙曲線 $x^2-y^2=a^2$、OX 軸、及通任意點 (x, y) 之直徑所圍成面積的一般表達式。 答 $\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}$。

19．用積分法求由 OY 軸及二直線 $2x+y+8=0$，$y=-4$ 所作成三角形的面積。

答 4。

20．試以積分法求圓 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 的面積，其中 θ 爲參變量。

21．試求由擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 之一拱所圍成的面積。［當 x 由 0 變至 $2\pi a$ 時，θ 由 0 變到 2π］。 答 $3\pi a^2$，亦卽母圓面積的三倍。

22．求心狀線 $x=a(2\cos t-\cos 2t)$，$y=a(2\sin t-\sin 2t)$ 所圍成的面積。 答 $6\pi a^2$。

23．求內擺線 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$（其中 θ 爲參變數）所圍成的面積。

答 $\frac{3}{8}\pi a^2$，卽 $\frac{3}{8}$ 倍外接圓之面積。

24．求笛卡兒葉線 $x^3+y^3=3axy$ 所作成的一圈面積（圖 26）。

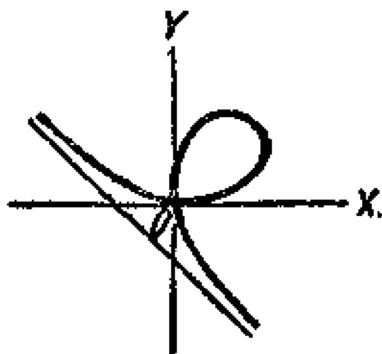


圖 26.

提示：設 $y=tx$；則

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\quad dx=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}3adt。$$

t 的上下限爲 0 及 ∞。 答 $\frac{3}{2}a^2$。

25．求下列曲線所圍成的面積：

（a）$(y-x)^2=x^3$，$y=0$。 答 $\frac{1}{10}$。

（b）$(x-y^2)^2=y^5$，$x=0$。 答 $\frac{1}{21}$。

（c）$a^2y=x(x^2-a^2)$，$y=0$。 答 $\frac{1}{2}a^2$。

（d）$x(1+y^2)=1$，$x=0$。 答 π。

（e）$x=y^2(y-1)$，$x=0$。 答 $\frac{1}{12}$。

§48. 極坐標中平面曲線的面積

設欲求由曲線 $\rho=f(\theta)$ 及二矢徑（極角各爲 α 及 β）所圍成的面積。

第一步 所求面積 V“顯然”是圖 27 中所示各圓扇形面積之和的極限。

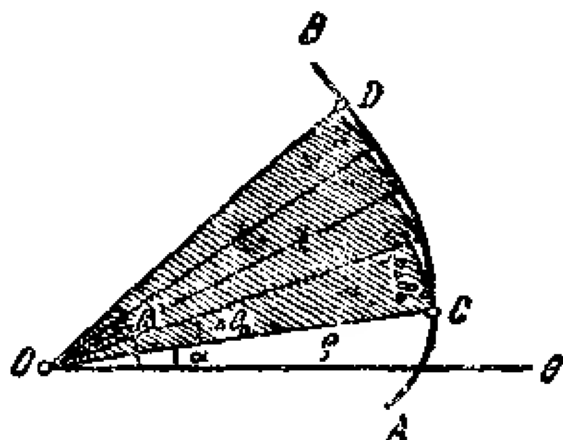


圖 27.

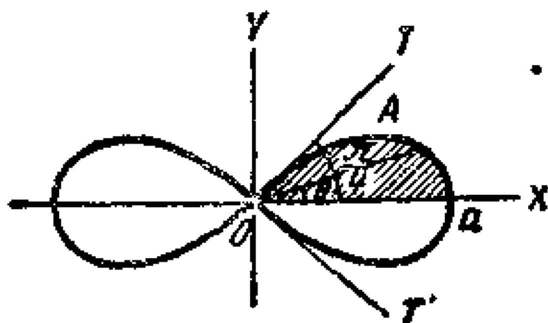


圖 28.

第二步 設 $\Delta\theta_0$, $\Delta\theta_1$, … 爲扇形的圓心角, ρ_0, ρ_1, … 爲其半徑。扇形面積之和爲:

$$\frac{1}{2}\rho_0^2\Delta\theta_0+\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1+\cdots+\frac{1}{2}\rho_{n-1}^2\Delta\theta_{n-1}\text{ 。}$$

(因爲圓扇形的面積等於 $\frac{1}{2}$ 半徑×圓弧,因此,第一個圓扇形面積等於 $\frac{1}{2}\rho_0\cdot\rho_0\Delta\theta_0=\frac{1}{2}\rho_0^2\Delta\theta_0$ 等等…)。

第三步 取極限,得

$$V=\lim\left[\frac{1}{2}\rho_0^2\Delta\theta_0+\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1+\cdots+\frac{1}{2}\rho_{n-1}^2\Delta\theta_{n-1}\right]=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\rho^2d\theta\text{ 。}$$

故

$$\text{面積}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2d\theta\text{ 。}\qquad(3)$$

記憶法 面積元素是半徑爲 ρ 及圓心角爲 $d\theta$ 的圓扇形面積,該面積爲 $\frac{1}{2}\rho^2\,d\theta$ 。

例 1. 求雙紐線 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ 的全部面積。

解 雙紐線的幾何圖形係積成的阿拉伯數字 8, 如圖 28 所示。該曲線通過直角笛卡兒坐標的原點 O,在該點曲線有兩條不同的切線,各等分坐標軸之間的角度。因此,整個雙紐線的面積, 爲其陰影部分 OAa 的四倍。把極角自 0 變到 $\frac{\pi}{4}$ 就得到 OAa 的面積。因此整個雙紐線的面積等於:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\varphi\, d\varphi\ 。$$

第一步 $\frac{1}{2}a^2\cos 2\varphi$ 的原函數為 $\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi+C$。

(直接證驗即知其正確)

第二步 作差:

$$\left[\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}a^2\sin 2\frac{\pi}{4}-0=\frac{1}{4}a^2。$$

答 所求雙紐線的面積為 $4\cdot\frac{1}{4}a^2=a^2$，亦即邊長為 a 的正方形之面積。

例 2. 求心狀線 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的整個面積（圖 29）。

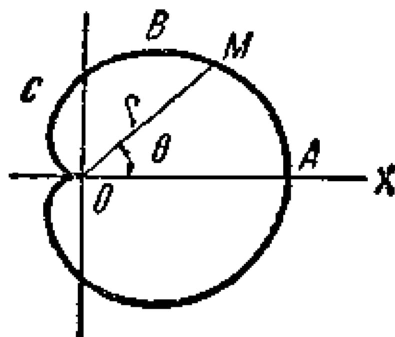


圖 29.

解 因曲線對極軸 OX 是對稱的，故整個面積是 $OABC$ 面積的兩倍。這個面積是 θ 由 0 變至 π 時，矢徑所掃出來的。由此代入(3)得．

$$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2。$$

故心狀線的面積，為母圓面積的六倍。

習　題

1. 試求阿基米德螺線的矢徑從 $\theta=0$ 開始轉一圈後所掃出的面積。 答 $\frac{4}{3}\pi^3a^2$。

2. 試求曲線 $\rho=a\cos 2\theta$ 中一瓣的面積 答 $\frac{1}{8}\pi a^2$。

3. 試證明，三瓣玫瑰線 $\rho=a\sin 3\theta$ 的面積，等於其外接圓面積的四分之一。

4. 求拋物線 $\rho=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ 與其正焦弦(過焦點垂直於其軸之弦)之間的面積。

 答 $\frac{8}{3}a^2$。

5. 試證明雙曲螺線 $\rho\theta=a$ 在任意二矢徑之間的面積，正比於該二矢徑長之差。

6. 求橢圓 $\rho^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ 的面積。 答 πab。

7. 求曲線 $\rho=a(\sin 2\theta+\cos 2\theta)$ 的整個面積。 答 πa^2。

8. 求曲線 $\rho^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$ 圈的面積。 答 $\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\ln 2$。

9. 求曲線 $\rho^2=a^2\sin 4\theta$ 所圍成的面積。 答 a^2。

§49. 旋轉體的體積

將平面圖形 $ABCD$ 繞 OX 軸旋轉，設所成旋轉體的體積爲 V，平面曲線 DC 的方程爲：

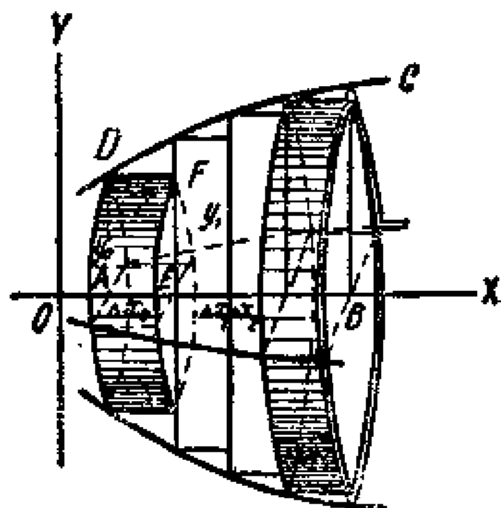


圖 30.

$$y=f(x)。$$

第一步 作許多矩形，內接於平面圖形 $ABCD$，如圖所示。當面積繞 OX 軸轉時，每一個矩形都形成一個圓柱體。所求體積 V"顯然"等於這些圓柱體積之和的極限(圖 30)。

第二步 以 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots$ 表示矩形的底，$y_0, y_1, \cdots$ 表示矩形的高，則矩形 $AEFD$ 所轉成的圓柱體積爲 $\pi y_0^2 \Delta x_0$。故這些圓柱體積之和爲：

$$\pi y_0^2 \Delta x_0+\pi y_1^2 \Delta x_1+\cdots+\pi y_{n-1}^2 \Delta x_{n-1}。$$

第三步 取極限，得

$$V=\lim \left[\pi y_0^2 \Delta x_0+\cdots+\pi y_{n-1}^2 \Delta x_{n-1}\right]=\int_a^b \pi y^2\, dx。$$

因此，把平面曲線 DC 繞 OX 軸旋轉而得的旋轉體體積(在垂直於該軸，並過 $x=a$，及 $x=b$ 二點的平面之間的部分)爲：

$$\text{體積}=\pi \int_a^b y^2\, dx, \qquad (4)$$

其中應認爲 $y=f(x)$。

記憶法 體積元素是以 y 爲半徑及 dx 爲高的圓柱體體積，該體積爲 $\pi y^2\, dx$。

假若曲線 CD 的方程是參量形式

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t),$$

則應當在上面的體積公式中以 $y=\varphi(t)$，$dx=f'(t)dt$ 代入，並應將積分上下限改爲 t_2 及 t_1，假若 $x=a$，$t=t_1$；$x=b$，$t=t_2$ 的話。

例 1　求橢圓繞其軸旋轉所得的體積(圖 31)。

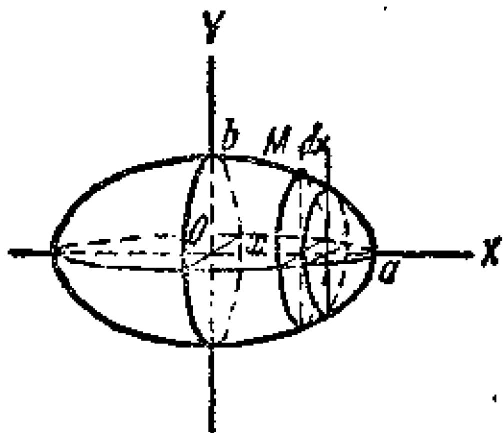


圖　31

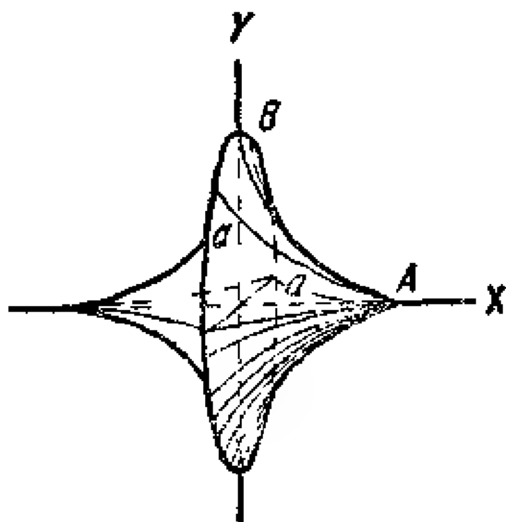


圖　32.

解　設橢圓的方程爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。由此得 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$。因爲被旋轉的曲線的方程，係假定爲 $y=f(x)$ 的形式，故在這種情形下我們可知 $f^2(x)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$。顯然,整個體積是由橢圓的 aAb 弧旋轉所得體積的兩倍,故所求整個體積爲

$$2\int_0^a \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx。$$

第一步　$\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ 的原函數爲

$$\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)+C。$$

第二步　作差:

$$\left[\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a=\left[\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2a-\frac{a^3}{3}\right)\right]-0=\frac{2}{3}\pi ab^2。$$

答　整個體積爲 $\frac{4}{3}\pi ab^2$。若 $a=b$，顯然旋轉了一個半徑爲 a 的圓，而半徑爲 a 的球的體積是 $\frac{4}{3}\pi a^2$。只要令 $a=b$，立刻可由所得公式中得到這個結果。

例 2．試求繞 OX 軸旋轉內擺線

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

所得的體積。

解　這裏 $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$；故 $F^2(x)=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$。旋轉的曲線對 OY 軸是對稱的，故

$$V=2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx=2\pi\int_0^a (a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)\,dx=\frac{32}{105}\pi a^3。$$

習 題

1. 把過原點及(a, b)點之直線繞 OX 軸旋轉，試以積分法求所得的圓錐體積。

答 $\frac{1}{3}\pi ab^2$。

2. 試求圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 繞 OX 軸旋轉所得之環的體積。 答 $2\pi^2a^2b$。

3. 把原點至(x_1, y_1)點的拋物線弧 $y^2=4ax$ 繞 OX 軸旋轉試求所得拋物體之體積。

答 $2\pi ax_1^2=\frac{1}{2}\pi y_1^2x_1$，爲其外接圓柱體體積之半。

4. 試以積分法求繞 OX 軸，旋轉兩軸間之直線 $4x-5y+3=0$ 所得之圓錐體體積。

答 $\frac{9}{100}\pi$。

5. 試求繞 OX 軸，旋轉由 $x=0$ 至 $x=3a$ 之間的曲線$(x-4a)y^2=ax(x-3a)$所得之體積。

答 $\frac{1}{2}\pi a^3(15-16\ln 2)$。

6. 試求繞 OX 軸，旋轉下列各曲線之間的圖形所得之體積：

(a)拋物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$，直線 $x=0$ 及 $y=0$。 答 $\frac{\pi a^3}{15}$。

(b)正弦曲線 $y=\sin x$ 之一波。 答 $\frac{\pi^2}{2}$。

(c)拋物線 $y^2=4x$ 及直線 $x=4$。 答 32π。

(d)曲線 $y=xe^x$ 及 $x=1$, $y=0$。 答 $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$。

(e)曲線 $y^2=9x$ 及直線 $y=3x$。 答 $\frac{3}{2}\pi$。

7. 試求旋轉下列各曲線之間的圖形所得的體積：

		繞 OX 軸	繞 OY 軸
(a) $y=e^x$, $x=0$, $y=0$。	答	$\frac{\pi}{2}$。	2π。
(b) $y=x^3$, $x=2$, $y=0$。	答	$\frac{128\pi}{7}$。	$\frac{96\pi}{5}$。
(c) $ay^2=x^3$, $y=0$, $x=a$。	答	$\frac{1}{4}\pi a^3$。	$\frac{3}{7}\pi a^3$
(d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$。	答	48π。	64π。
(e) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$。	答	$\frac{32}{35}\pi ab^2$。	$\frac{2}{5}\pi a^2b$。

8. 試求，繞 OX 軸由 $x=0$ 至 $x=b$，旋轉鏈線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 所得旋轉體的體積。

答 $\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2b}{2}$。

9．試求旋轉蔓葉線 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$，繞其漸近線 $x=2a$ 所得之體積。　答　$2\pi^2a^3$。

10．已知曳物線之切線斜率為 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$；試求旋轉該曲線繞 OX 軸所得之體積。

答　$\frac{1}{3}\pi a^3$。

11．試證明，由旋轉等邊雙曲線 $x^2-y^2=a^2$，繞 OX 軸所得高為 a 的錐體體積，等於半徑為 a 之球的體積。

12．利用內擺線之參變數方程

$$x=a\cos^3\theta,\quad y=a\sin^3\theta,$$

計算繞 OX 軸旋轉該曲線所得之體積。　答　$\frac{32\pi a^3}{105}$。

13．試求（1）繞 OX 軸，（2）繞 OY 軸，旋轉擺線一拱

$$y=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)$$

所得之體積。　答　$5\pi^2a^3$ 及 $6\pi^3a^3$。

14．試證明，繞 OX 軸旋轉曲線 $x^2y^2=(x-a)(x-b)$，所得之體積，等於

$$\pi\left\{(a+b)\ln\frac{a}{b}+2(b-a)\right\}。\quad (b>a)。$$

15．試求繞 OX 軸旋轉曲線 $x^4-a^2x^2+a^2y^2=0$，所得之體積。　答　$\frac{4}{15}\pi a^3$。

16．試求繞 Oy 軸旋轉曲線 $x^2+y^{\frac{2}{3}}=1$，所得之體積。　答　$\frac{4}{5}\pi$。

§50．曲線的長

一根直線線段的長度，是直接度量的。為此，我們可以取另外的一根直線線段，作為度量的單位，把它靠緊那根要度量的線段，然後數數看，它包含多少個單位。

假若我們要決定一條曲線的長度時，這種直接度量法就不可能做了；因為直的單位線段，不可能與曲線弧重合起來。把曲線弧"拉直"也是沒有意義的；因為在"拉直"時，可能改變了它的"長度"。



圖 33.

因此，為着度量曲線的弧長，我們用另外的方法。利用曲線上的點（如 C, D, E）將曲線 AB 分為許多小份，然後用弦把每對相鄰的點連接起來（如圖 33 中的 AC, CD, DE,

EB)。

我們定義：曲線的長度是，當分點無限增加，同時弦長都各趨近於零時，諸弦長之和的極限。

這種度量曲線弧長的方法，稱為曲線的"直化"。

讀者在初等幾何中早已遇到這種方法了，那裏面曾把圓周長，作為圓內接(或外切)正多邊形的周長當邊數無限增加時的極限。

我們現在要用這種方法求平面曲線的長度。讀者應仔細研究，它是怎樣用的。

§51. 直角坐標中平面曲線的長

設已知曲線　　$y=f(x)$

及其兩點 $P(a, c)$, $Q(b, d)$。欲求 PQ 弧的長。

第一步　在 PQ 弧上取 $n-1$ 個中間點 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$。於是 PQ 弧被分為 n 個弧段，我們把弧的端點一對對地用弦連接起來。所求的 PQ 弧長，就是這些弦長之和的極限(圖 34)。

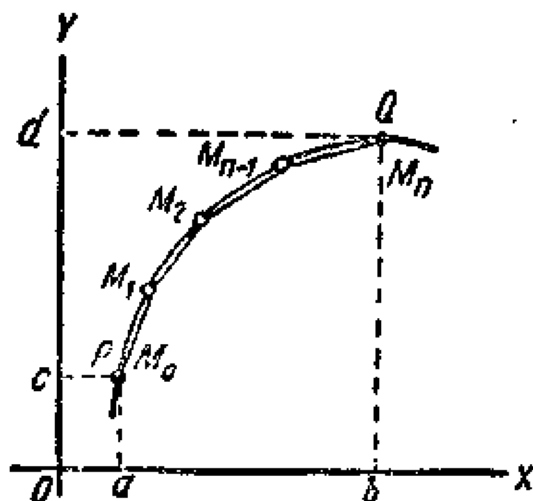


圖 34.

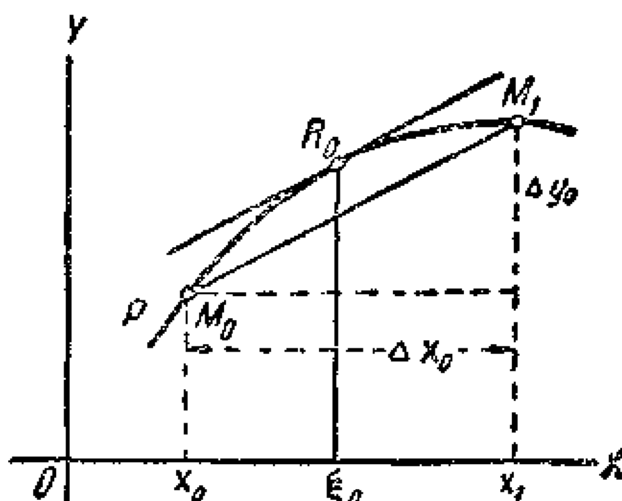


圖 35.

第二步　現在考察這些弦中間的一個，如 PM_1。我們用 x_i 及 y_i 表示 M_i 點的坐標。為了使記號簡單起見，我們設 $P=M_0$, $a=x_0$, $c=y_0$ 及 $Q=M_n$, $b=x_n$, $d=y_n$。我們有：

$$PM_1 = M_0M_1 = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right)^2}\,\Delta x_0\text{。}$$

按中値定理，可得

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = f'(\xi_0)\Delta x_0,$$

式中 ξ_0 爲線段 $[x_0, x_1]$ 中的某個未知點(圖 35)。

因此 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(\xi_0)$，故：

$$PM_1 = M_0M_1 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_0)}\,\Delta x_0\text{。}$$

同樣，對於其它諸弦，也有：

$$M_1M_2 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}\,\Delta x_1,$$

$$M_2M_3 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_2)}\,\Delta x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$M_{n-1}Q = M_{n-1}M_n = \sqrt{1 + f'^2(\xi_{n-1})}\,\Delta x_{n-1}\text{。}$$

因此由弦所組成的折線之長等於：

$$\sqrt{1 + f'^2(\xi_0)}\,\Delta x_0 + \cdots + \sqrt{1 + f'^2(\xi_{n-1})}\,\Delta x_{n-1}\text{。}$$

第三步 取極限，得：

$$\lim\left[\sqrt{1 + f'^2(\xi_0)}\,\Delta x_0 + \cdots + \sqrt{1 + f'^2(\xi_{n-1})}\,\Delta x_{n-1}\right] =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\text{。}$$

隨之，若以 s 表示 PQ 弧長，則得：

$$\text{弧長} = s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{5}$$

其中的導數 $y' = \frac{dy}{dx}$ 是應當先從曲線方程 $y = f(x)$ 求出來的。

由微分學(第一册，§128)中早已求出的**曲線弧微分** ds **的表達式**，可以導出這個公式來。實際上，在那裏我們已經得到

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

由此

$$s = \left[\int \sqrt{1 + y'^2}\,dx\right]_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx\text{。}$$

假若已知曲線 PQ 的方程爲

$$x=f(y),$$

則上述求公式(5)的各種討論,仍然適用;因爲 OX 軸與 OY 軸的作用是完全相當的。由此,我們立刻可寫:

$$\text{弧長}=s=\int_c^d\sqrt{x'^2+1}\,dy\text{。} \tag{5*}$$

假若曲線 PQ 是用參量方程給出的:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),$$

則只需應用對 OX 及 OY 軸是對稱的公式: $ds^2=dx^2+dy^2$ 亦即 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$,故 $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$。由此而得:

$$\text{弧長}=s=\left[\int\sqrt{dx^2+dy^2}\right]_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt, \tag{5**}$$

[因爲 $dx=f'(x)dt$, $dy=\varphi'(t)dt$]。

記憶法 弧元素是以 dx 及 dy 爲二垂邊的直角三角形的斜邊。按畢達歌拉斯定理,斜邊長等於

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\text{。}$$

例 1. 求圓 $x^2+y^2=r^2$ 的周長(圖 36)。

解 微分後,得:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\text{。}$$

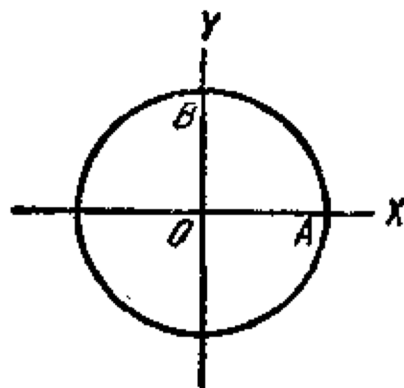


圖 36.

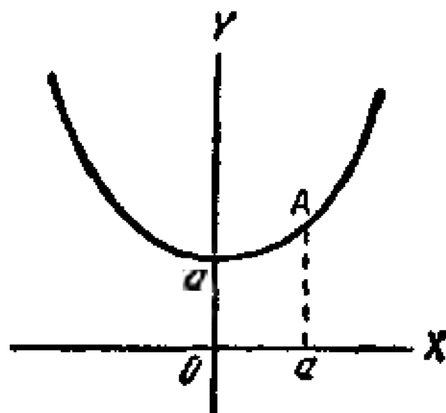


圖 37.

代入(5)得：

$$BA\text{弧}=\int_0^r\left[1+\frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^r\left[\frac{y^2+x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^r\left[\frac{r^2}{r^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}dx。$$

[由圓方程得 $y^2=r^2-x^2$，代入之以消去 y]

由此 $$BA\text{弧}=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\left[r\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r=\frac{\pi r}{2}。$$

故圓周長等於 $2\pi r$。

例 2. 求懸鏈線 $$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

由 $x=0$ 至 $x=a$ 的弧長(圖 37)。

解 第一步 $$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}),\quad f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}),$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}。$$

第二步 $e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}$ 的原函數是

$$\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})+C,$$

(直接驗證卽知其正確)

第三步 作差： $$\left[\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right]_0^a=\frac{a}{2}(e-e^{-1})=\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)。$$

習 題

1. 試求半立方拋物線 $ay^2=x^3$ 由原點到縱坐標軸 $x=5a$ 之間的弧長。 答 $\frac{335}{27}a$。
2. 求內擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 整個周長。 答 $6a$。
3. 求懸鏈線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 由 $x=0$ 至 (x, y) 點的弧長。 答 $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$。
4. 求曲線，$9ay^2=x(x-3a)^2$ 由 $x=0$ 至 $x=3a$ 點的弧長。 答 $2a\sqrt{3}$。
5. 求第一象限中曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 的弧長。 答 $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$。
6. 求由 $x=a$ 至 $x=b$ 之曲線 $e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 的弧長。 答 $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b$。
7. 求擺線 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 一拱的弧長。 答 $8a$。
8. 求圓之漸伸線 $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$，$y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta=\theta_1$，之間的弧長。 答 $\frac{1}{2}a\theta_1^2$。

§52. 極坐標中平面曲線的弧長

由極坐標中弧微分 ds 的公式(上册 §129)

$$ds=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho\,d\theta)^2},$$

立卽可得：

$$弧長=s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \qquad (6)$$

其中 ρ 及 $\frac{d\rho}{d\theta}$ 當然應該從曲線的極坐標方程求得。

假若取 ρ (而非 θ)爲自變量更方便時,則有公式：

$$弧長=s=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}\,d\rho, \qquad (6^*)$$

其中導數 $\frac{d\theta}{d\rho}$ 應先從曲線的極坐標方程求出。

記憶法 弧元素爲一直角三角形的斜邊,該三角形的另外兩邊爲 $d\rho$ 及圓弧長 $\rho\,d\theta$。按畢達歌拉斯定理,其長 $=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho\,d\theta)^2}$ (圖 38)。

例 求心臟線 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的周長(圖 39)。

解 這裏, $\frac{d\rho}{d\theta}=-a\sin\theta$。

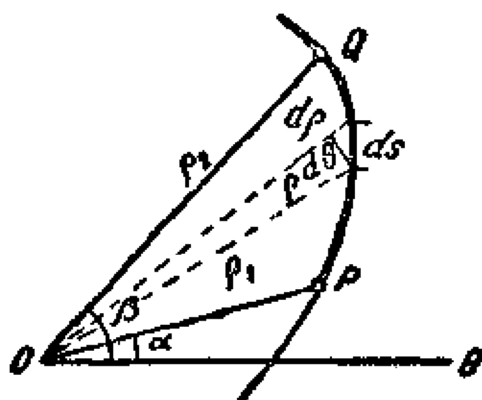


圖 38.

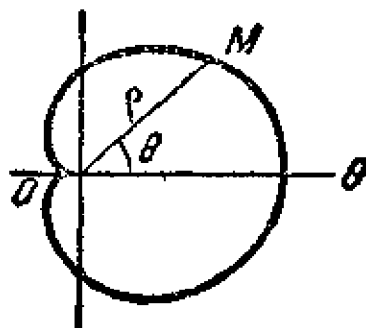


圖 39.

當 θ 由 0 變至 π 時, P 點畫出了曲線的一半。代入(6)式中,得：

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=4a。$$

故
$$S=8a。$$

習 題

1. 求阿幾米得螺線 $\rho=a\theta$ 從原點到第一圈終點的弧長。

答 $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$。

2. 求螺線 $\rho=e^{a\theta}$ 由原點到 (ρ, θ) 點的弧長。 答 $\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2+1}$。

3. 求整個曲線 $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 的弧長。 答 $\frac{3}{2}\pi a$。

4. 求圓 $\rho=2r\sin\theta$ 的周長。 答 $2\pi r$。

5. 求雙曲螺線 $\rho\theta=a$ 由 (ρ_1, θ_1) 到 (ρ_2, θ_2) 的弧長。

答 $\sqrt{a^2+\rho_1^2}-\sqrt{a^2+\rho_2^2}+a\ln\frac{\rho_1(a+\sqrt{a^2+\rho_2^2})}{\rho_2(a+\sqrt{a^2+\rho_1^2})}$。

6. 求蔓葉線 $\rho=2a\tan\theta\sin\theta$ 由 $\theta=0$ 到 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的弧長。

答 $2a\left\{\sqrt{5}-2-\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}\right\}$。

7. 求拋物線 $\rho=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ 由 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 到 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的弧長。

答 $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$。

§53. 旋轉體的表面

旋轉體的表面由平面曲線

$$y=f(x)$$

的弧 CD，繞 OX 軸旋轉而得。

今欲度量這旋轉體表面的面積。

第一步 像以前一樣，將 AB 線段分爲許多小線段 Δx_0, Δx_1, …，並在分點 x_0, x_1, … 上豎立縱坐標 y_0, y_1, …。引弦 CE, EF, …。當曲線旋轉時，每一根弦都畫出了一截圓錐的側面積。所求的旋轉體面積，即定義爲這些一截一截圓錐的側面積之和的極限(圖 40)。

第二步 爲了看得清楚起見，我們將第一段圓錐放大些畫出來

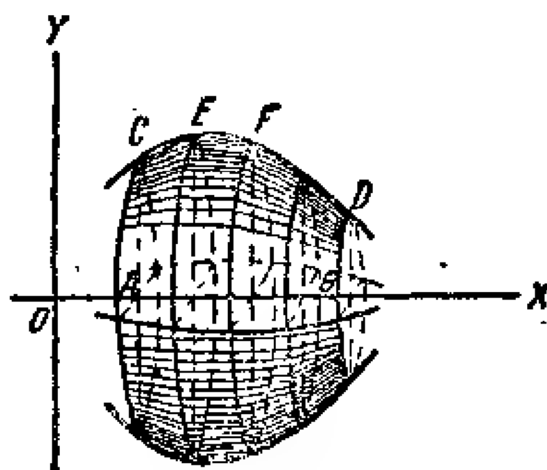


圖 40.

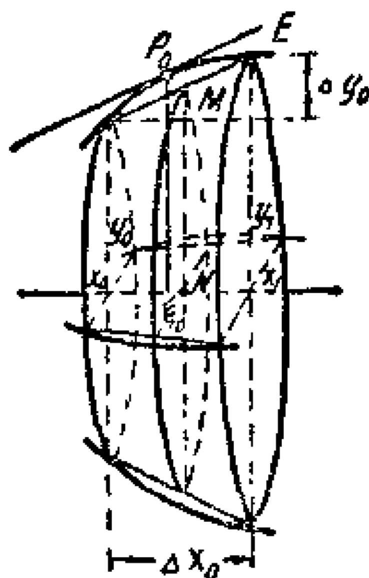


圖 41.

(圖 41)。設 M 是弦 CE 的中點。於是

$$圓錐的側面積=2\pi NM\cdot CE, \qquad (1)$$

因為一截圓錐的側面積，等於母線(即 CE)的中點所畫的圓周長乘上該母線的長。

我們把(1)式變換一下，首先

$$CE=\sqrt{(\Delta x_0)^2+(\Delta y_0)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right)^2}\cdot\Delta x_0=\sqrt{1+f'^2(\xi_0)}\,\Delta x_0,$$

因為根據中值定理，我們有 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=f'(\xi_0)$，其中 ξ_0 是線段$[x_0, x_1]$上某個未知的點。

其次線段 NM 為梯形 Cx_0x_1E 的中線，故等於 $\frac{y_0+y_1}{2}$。不難看到：這個量與 ξ_0 點的縱坐標 $f(\xi_0)$只差一個任意小的量 ε_0。因為我們有：

$$\frac{y_0+y_1}{2}-f(\xi_0)=\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}-f(\xi_0)=$$

$$=\frac{f(x_0)-f(\xi_0)}{2}+\frac{f(x_1)-f(\xi_0)}{2}。$$

因為整個曲線 CD 是連續的，故函數 $f(x)$ 在線段$[a, b]$上是連續

的。這表示了，對於每一個（預先選擇好的任意小的）正數 ε，恆存在正數 η，使得當 $|x'-x''|<\eta$ 成立時即有不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。由此可知：當 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$ 之長變得小於 η 時，則在各小線段的任意二點處，函數 $f(x)$ 的數值之差恆小於 ε。

特別是，我們有：

$$|f(x_0)-f(\xi_0)|<\varepsilon \text{及} |f(x_1)-f(\xi_0)|<\varepsilon。$$

由此
$$\left|\frac{y_1+y_2}{2}-f(\xi_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

因此，我們有

$$NM-f(\xi_0)=\varepsilon_0, \text{其中 } \varepsilon_0<\varepsilon。$$

因爲由此可得 $NM=f(\xi_0)+\varepsilon_0$，故所討論的圓錐的側面面積可寫爲：

$$2\pi\, NM\cdot CE=2\pi[f(\xi_0)+\varepsilon_0]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_0)}\,\Delta x_0。$$

我們已經把最初一截圓錐的側面積的表達式寫出來了。對於其餘各截圓錐的側面積，不待說，也有類似的表達式，亦即

$$2\pi[f(\xi_1)+\varepsilon_1]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,\Delta x_1, \quad \varepsilon_1<\varepsilon;$$
$$2\pi[f(\xi_2)+\varepsilon_2]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\,\Delta x_2, \quad \varepsilon_2<\varepsilon;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\pi[f(\xi_{n-1})+\varepsilon_{n-1}]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_{n-1})}\,\Delta x_{n-1}, \quad \varepsilon_{n-1}<\varepsilon。$$

把這些所得的表達式相加，得：

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi[f(\xi_i)+\varepsilon_i]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i。$$

第三步 取極限：

$$\lim\sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi[f(\xi_i)+\varepsilon_i]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i。$$

顯然，該極限等於兩個極限之和，因爲：

$$2\pi[f(\xi_i)+\varepsilon_i]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i+$$
$$+2\pi\,\varepsilon_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i。$$

因此，所求的旋轉體面積 S，等於

$$\lim\sum_{i=0}^{i=n-1}2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\cdot\Delta x_i+$$

$$+\lim\sum_{i=0}^{i=n-1}2\pi\varepsilon_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\cdot\Delta x_i\text{。}$$

第一個極限，顯然是定積分：

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\text{。}$$

第二個極限是零。因爲，由某瞬時起，所有的 ε_i 均適合不等式 $|\varepsilon_i|<\varepsilon$（其中 i 爲 $0, 1, 2, \cdots, n-1$）中的任何數，故

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n-1}2\pi\varepsilon_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right|<\sum_{i=0}^{i=n-1}2\pi\varepsilon\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=$$

$$=2\pi\varepsilon\sum_{i=1}^{i=n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i<3\pi\varepsilon\cdot\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx;$$

這是因爲當所有的 $\Delta x_i\to 0$ 而 ε 又是定數時，積分前面的一個式子是趨近於這個積分式的。

右邊的積分，大家都知道，是等於整條曲線 CD 的弧長 L 的。所以由某瞬時起，我們有：

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n-1}2\pi\varepsilon_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right|<3\pi\varepsilon\cdot L\text{。}$$

因爲固定的正數 ε 可以取得任意小，故上面不等式的左邊是一個無窮小，其極限爲零。

因此，最後可知，旋轉體的面積 S 是由公式

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{7}$$

確定的，其中 y 和 $\frac{dy}{dx}$ 應該從被旋轉的曲線方程 $y=f(x)$ 求出來。

公式（7）可以寫爲

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds, \tag{7*}$$

因爲　　$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$。

記憶法　面積元素，是一個無限薄的一截圓錐的側面積，圓錐的母線爲弧長元素 ds 而它的中截面的周長爲 $2\pi y$，就是說，面積元素等於 $2\pi\, y\, ds$（圖 42）。

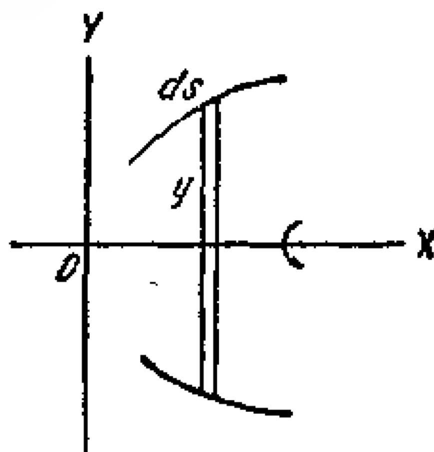


圖　42.

例 1．將立方拋物線

$$a^2y=x^3,$$

由 $x=0$ 到 $x=a$ 之間的一段弧，繞 OX 軸旋轉。試求旋轉體的面積。

解　我們有 $y'=\frac{3x^2}{a^2}$。由此得

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^4+9x^4)}\,dx。$$

故面積元素等於：

$$2\pi\, y\, ds=\frac{2\pi}{a^4}\sqrt{(a^4+9x^4)}\,x^3\,dx。$$

因此，按(7*)

$$S=\frac{2\pi}{a^4}\int_0^a\sqrt{(a^4+9x^4)}\,x^3\,dx=\frac{\pi}{27a^4}\Big[\sqrt{(a^4+9x^4)^3}\Big]_0^a=$$

$$=\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)a^2=3.6\cdots a^2。$$

例 2．繞 OX 軸旋轉內擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，試求所得的旋轉面面積。

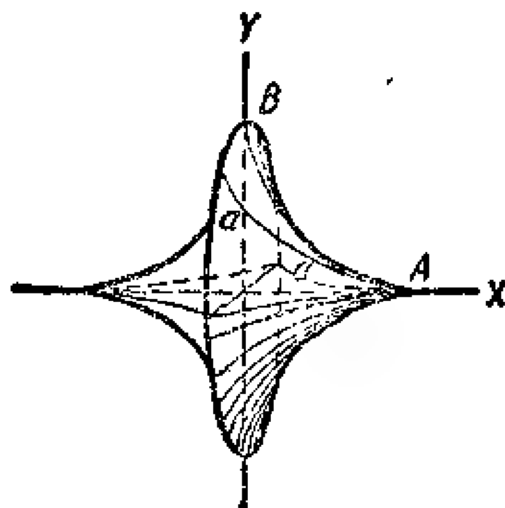


圖　43.

解　這裏 $f(x)=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，

$$f'(x)=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}。$$

代入(7)式中，並注意 BA 弧只轉出所求面積的一半（圖 43），我們得：

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\Big(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\Big)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\Big)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=2\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{6}{5}\pi a^2。$$

故
$$S=\frac{12}{5}\pi a^2。$$

習 題

1．把圓 $x^2+y^2=r^2$ 繞其直徑旋轉，試求所得的球的面積。 答 $4\pi r^2$。

2．繞 OX 軸旋轉拋物線 $y^2=4ax$ 由頂點至 $x=3a$ 的點之間的弧段，試求所得的旋轉面面積。 答 $\frac{56}{3}\pi a^2$。

3．試以積分法求圓錐的側面積，該圓錐是繞 OX 軸旋轉原點至 (a, b) 點的直線而得的。 答 $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$。

4．繞 OX 軸旋轉圓
$$x^2+(y-b)^2=a^2,$$
試求所得的環的面積。 答 $4\pi^2ab$。

暗示 $\sqrt{a^2-x^2}$ 之正值，給出了外半面的面積，而其負值則給出了內半面的面積。

5．繞 OX 軸旋轉懸鏈線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 由 $x=0$ 至 $x=a$ 的一段弧。試求所得的旋轉面面積。 答 $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$。

6．繞 OX 軸旋轉心狀線 $x=a(2\cos\theta-\cos 2\theta)$，$y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta)$ 試求所得的面積。 答 $\frac{128}{5}\pi a^2$。

7．試證明，繞 OX 軸旋轉擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 所得的面積爲 $\frac{64}{3}\pi a^2$，而繞 OY 軸所得的面積爲 $16\pi^2a^2$。

8．證明：假若繞 OX 軸旋轉曲線 $y^2+4x=2\ln y$ 由 $y=1$ 至 $y=2$ 的一段弧，那麼所得的面積等於 $\frac{10}{3}\pi$。

9．試求繞 OX 軸，旋轉下列各曲線弧所得的面積：

(a) $y=e^{-x}$ 由 $x=0$ 至 $x=\infty$ 答 $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$。

(b) 曲線 $9ay^2=x(3a-x)^2$ 的圈。 答 $3\pi a^2$。

(c) 曲線 $8a^2y^2=a^2x^2-x^4$ 的圈。 答 $\frac{\pi a^2}{4}$。

10．旋轉下列曲線的弧段：(1) 繞 OX 軸，(2) 繞 OY 軸試求所得的面積。

(a) 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。 答 $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$；
$$2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e},\quad 其中\ e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}（橢圓的離心率）。$$

(b) $x=e^\theta\sin\theta$，$y=e^\theta\cos\theta$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

答 $\frac{2\sqrt{2\pi}}{5}(e^\pi-2)$；$\frac{2\sqrt{2\pi}}{5}(2e^\pi+1)$。

§54. 平行斷面面積已知的物體的體積

在 § 49 中我們已經講過，怎樣利用單積分來計算旋轉體的體積。顯然，旋轉體可以當作是圓面移動作成的，這個圓的圓心在旋轉軸上，圓面垂直於該軸，在移動時，圓的半徑是變化着的。例如在圖 44 中，可以設想圓 $ACBD$（其平面垂直於 OX 軸），當其中心由 O 點移到 N 點，又其半徑 $MC\,(=y)$ 隨 $OM\,(=x)$ 的改變按照一定規律（這規律是由那產生旋轉體 $OEGFH$ 的曲線的方程來定的）連續地變化時，就產生了旋轉體 $OEGFH$。

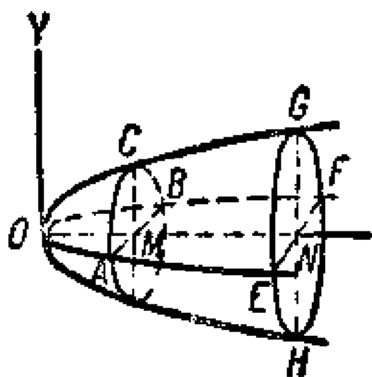


圖 44.

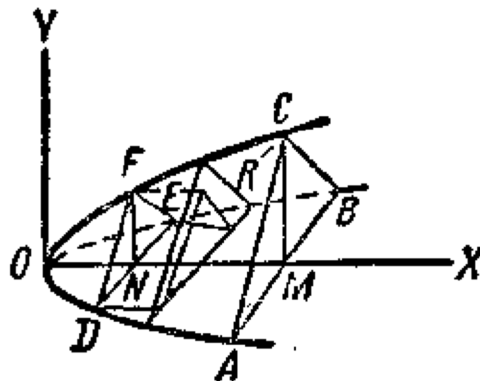


圖 45.

現在要講，當非旋轉體的平行斷面面積可以表示為它們到某定點的距離的函數時，怎樣應用這種思想來求它的體積。

用垂直於 OX 軸的許多平面，將圖 45 中所示的物體分為 n 片，又我們取坐標原點為上述定點。設 FDE 為該物體的一斷面。在這塊斷面上，作一個小正稜柱，它的另一塊底面正好在緊接着的另一斷面上。

按假設，斷面 FDE 的面積，是 ON（即 x）的函數，我們用 $f(x)$ 表示這塊面積，又設 Δx 為稜柱的高。

隨之，$f(x)\Delta x$ 就是該物體體積 V 的元素。所求體積 V，就是當分割數 n 無限增加且所有的 Δx 都趨近於零時，各稜柱體積之和的極限。這樣就得到：

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\text{。} \qquad (8)$$

顯然，物體 $OABC$（圖 45）可以當作是，當 x 由 0 變至 OM 時，由連續變化的斷面 DEF 所產生的物體。下面的例子就是用來說明這種思想的。

例 1．試求橢球
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
的體積。

解　我們可以設想這個橢球是變化着的橢圓 $ABCD$（圖 46）由 E 至 G 點移動所作成的。在移動時，該橢圓的心 M 在 OX 軸上，其平面垂直於該軸。顯然動橢圓 $ABCD$ 的軸 b' 及 c'（因而，其面積）是（決定其位置的）橫坐標 $x=OM$ 的函數。

為了求軸 b'，今考察平面 XOY 中的橢圓 $GHEJ$，其方程是：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{。}$$

將方程中 $y(=b')$ 解為 $x(=OM)$ 的函數，得：

$$b'=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\text{。}$$

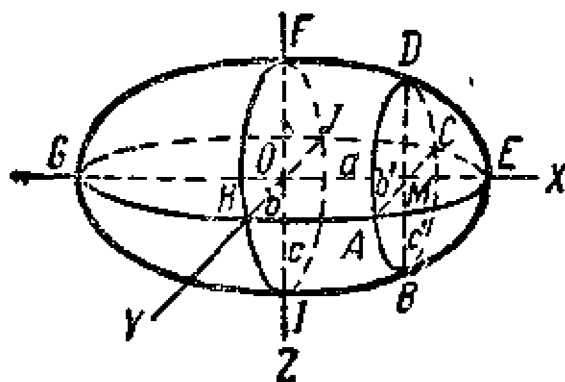


圖 46.

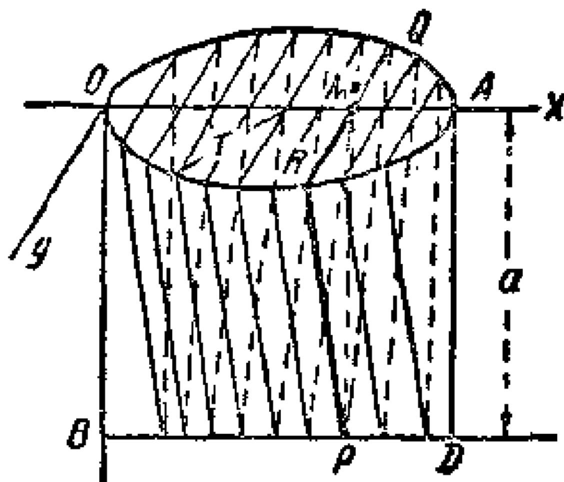


圖 47

同樣，從平面 XOZ 中的橢圓 $EFGJ$ 的方程得：

$$c'=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\text{。}$$

故橢球斷面的 $ABCD$ 面積為：

$$\pi b'c'=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)=f(x)\text{。}$$

代入(8)中，得：

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc。$$

例 2. 試求底爲圓形的正劈錐體❶的體積，設其底半徑爲 r，高爲 a。

解　作坐標軸如圖 47 所示，今考察垂直於 OX 軸的斷面 PQR。正劈錐體的這塊斷面總是等腰三角形，因爲

$$MP=a,\quad RM=\sqrt{2rx-x^2}。$$

(後者是從圓 $ORAQ$ 的方程 $x^2+y^2=2rx$ 中解 y 所得)，故該斷面的面積爲

$$a\sqrt{2rx-x^2}=f(x)。$$

代入(8)，得：

$$V=a\int_0^{2r}\sqrt{2rx-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi r^2a。$$

這正好是同底又同高的圓柱的體積的一半。

習　　題

1．正方形對角線的交點，沿着半徑爲 a 的圓的某條直徑上移動；同時，正方形所在的平面，恆與該圓的平面垂直；又正方形的兩個對頂點，是沿着圓周移動的。試求該正方形移動時所作成的物體體積。　　答　$\frac{8}{3}a^3$。

2．設等邊三角形移動時，其平面恆垂直於 OX 軸，又其底邊的二頂點各沿着 OX 軸之上的拋物線 $y^2=16ax$ 及 $y^2=4ax$ 的分支移動。假若該等邊三角形由原點移至橫坐標爲 a 的點，試求它作成的物體的體積。　　答　$\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$。

3．一個圓移動時，其上總有一點在 OY 軸上，其中心描出了橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，又該圓所在的平面恆垂直於 OY 軸。今求該圓移動時所作成的物體的體積。　　答　$\frac{8}{3}\pi a^2b$。

§55．積分學在自然科學上的應用

早在§44中，我們已講過應用積分來解決許多自然科學問題的一般程序。

這個程序共分三步：

第一步　將所求量 V 分爲無限增加的 n 個無窮減小的小份。

第二步　把這些小份表達得，使其和獲得 $\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 的形式。

第三步　取極限，得到解答如下：

---

❶ 看例題解中所講的，讀者就不難知道劈錐體的定義是怎樣的。

$$V=\int_a^b \Phi(x)\,dx。$$

我們講過，在這些步驟之中，最難做的是第二步（§ 46），也就是，將小分表達爲乘積 $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$ 的這一步。因爲，這個表達式應當絕對的準確，一點都不錯。小份的這個表達式是這樣難求，以至於我們多半根本不做第二步，而只直接指出：$\Phi(x_0)\Delta x_0+\Phi(x_1)\Delta x_1+\cdots+$ $+\Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ 之和的極限，是跟我們所求量 V 的觀念"很相合的"。

爲了避免含混不清地扯到我們對所求量的觀念，只須證明：我們根本無須將小份絕對準確地表達爲乘積 $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$，因爲當這些小份與乘積之差是均勻的高級無窮小時，最後的結果仍然相同。

現在我們來解釋。

1．均勻的無窮小　我們討論變量

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \cdots,\quad \mu。\tag{1}$$

由於我們在其右方不斷添上新的變量，所以這些變量的個數 m 是一直增加下去的。假若對於每一個給定的正數 ε，由某瞬時起，下列不等式（毫無例外）個個同時成立。

$$|\alpha|<\varepsilon,\quad |\beta|<\varepsilon,\quad |\gamma|<\varepsilon,\quad \cdots,\quad |\mu|<\varepsilon,\tag{2}$$

則這些變量（1），稱爲均勻的無窮小。

這個定義的意義在於，無窮小 α, β, γ, $\cdots$, μ 之中，並沒有趨近於零慢一些的無窮小。

舉一個有這種"慢一些"的現象的例子，如變量 $\alpha=\frac{1}{m}$，$\beta=\frac{2}{m}$，$\gamma=\frac{3}{m}$，$\cdots$。其中每一個都在（1）列中佔有一定的位置 i，並且當 m 無限增加時，它是趨近於零的，因爲當 i 是定數時，分數 $\frac{i}{m}$ 隨整數 m 的增加而無限減小。但是在每一瞬時，不等式（2）並不能統統成立，因爲我們恆有 $\mu=\frac{m}{m}=1$。所以，雖然（1）中每個變量個別的取出來（亦即在它一定的位置上），是一個無窮小，可是，整個在一起，它們並不是均勻的無窮小了。

2．均勻高級的無窮小　假若我們有兩列均勻的無窮小

$$\begin{matrix}\alpha^*, & \beta^*, & \gamma^*, & \cdots, & \mu^*,\\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots, & \mu,\end{matrix}\tag{3}$$

如果比值：

$$\frac{\alpha^*}{\alpha},\quad \frac{\beta^*}{\beta},\quad \frac{\gamma^*}{\gamma},\quad \cdots,\quad \frac{\mu^*}{\mu}$$

是均勻的無窮小，那麼，我們認爲第一列中的無窮小，對第二列中的無窮小說起來，是均勻高級的。

3．均勻相當　兩列均勻的無窮小

$$\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots, & \mu,\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \cdots, & \mu',\end{matrix}\tag{4}$$

假若它們的差

$$\alpha-\alpha',\quad \beta-\beta',\quad \gamma-\gamma',\quad \cdots,\quad \mu-\mu',\tag{5}$$

是均勻高級的無窮小，就說是均勻相當的。

今用 $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \cdots, \mu^*$ 來表示這些差，則我們有等式：

$$\alpha=\alpha'+\alpha^*, \quad \beta=\beta'+\beta^*, \quad \gamma=\gamma'+\gamma^*, \quad \cdots, \quad \mu=\mu'+\mu^* \text{。} \tag{6}$$

這可以敍述爲：

跟所給無窮小 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 均勻相當的無窮小 $\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \mu'$ 可從 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 中去掉（勾掉或抹掉）均勻高級的部分而得。

這個結論非常重要，因爲它有實用意義：若我們有無窮小的和，

$$\alpha=\alpha'+\alpha^*, \quad \beta=\beta'+\beta^*, \quad \gamma=\gamma'+\gamma^*, \quad \cdots, \quad \mu=\mu'+\mu^* \text{。} \tag{6}$$

我們可以索性略去其中均勻高級的無窮小 $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \cdots, \mu^*$；所得新的無窮小

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \quad \cdots, \quad \mu'$$

是跟所給的 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 均勻相當的。

定理 差爲均勻無窮小，這件事，是（3）中兩列無窮小爲均勻

$$\frac{\alpha'}{\alpha}-1, \quad \frac{\beta'}{\beta}-1, \quad \frac{\gamma'}{\gamma}-1, \quad \cdots, \quad \frac{\mu'}{\mu}-1 \tag{7}$$

相當的充分必要條件。

證明 引入下列記號表示這些差：

$$\frac{\alpha'}{\alpha}-1=\alpha'', \quad \frac{\beta'}{\beta}-1=\beta'', \quad \frac{\gamma'}{\gamma}-1=\gamma'', \quad \cdots, \quad \frac{\mu'}{\mu}-1=\mu'',$$

我們得到：

$$\alpha=\alpha'-\alpha\alpha'', \quad \beta=\beta'-\beta\beta'', \quad \gamma=\gamma'-\gamma\gamma'', \quad \cdots, \quad \mu=\mu'-\mu\mu'', \tag{8}$$

將這些等式與（6）中等式比較，我們看到：要（3）中兩列無窮小爲均勻相當，則必需而且只要無窮小 $\alpha\alpha'', \beta\beta'', \gamma\gamma'', \cdots, \mu\mu''$ 對 $\alpha, \beta, \cdots, \mu$ 而言爲均勻高級的無窮小。爲此，我們必需而且只要要量 $\alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots, \mu''$ 是均勻的無窮小。（證明完畢）

4．**第一形式的積分學原理。**

基本定理 I 若以均勻相當的無窮小 $\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \mu'$，來代替正負號相同的均勻無窮小，$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$，則諸無窮小之和的極限，並不改變。

證明 設 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 是正的。按條件，無窮小 $\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \mu'$ 是跟它們均勻相當的。這表示了，我們有等式（8），其中 $\alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots, \mu''$ 是均勻無窮小。因此，對於任意一個定數 ε，$\varepsilon>0$ 由某瞬時起，我們有不等式：

$$|\alpha''|<\varepsilon, \quad |\beta''|<\varepsilon, \quad |\gamma''|<\varepsilon, \quad \cdots, \quad |\mu''|<\varepsilon \text{。} \tag{9}$$

由此，由等式（8），可得下列不等式：

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'-\varepsilon\alpha<\alpha<\alpha'+\varepsilon\alpha \\ \beta'-\varepsilon\beta<\beta<\beta'+\varepsilon\beta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu'-\varepsilon\mu<\mu<\mu'+\varepsilon\mu\end{array}\right\} \text{。} \tag{10}$$

相加而得：
$$\sum\alpha'-\varepsilon\sum\alpha<\sum\alpha<\sum\alpha'+\varepsilon\sum\alpha。$$
由此得：
$$1-\varepsilon<\frac{\sum\alpha'}{\sum\alpha}<1+\varepsilon。$$

因爲 ε 可以取得任意小，故由此而知
$$\lim\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'+\cdots+\mu'}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu}=1。\tag{11}$$

這證明了，兩個和 $\alpha'+\beta'+\gamma'+\cdots+\mu'$ 及 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu$，具有同一極限；極限可以是有限數，無窮大或零。 （證明完畢）

5. 第二形式的積分學原理　假若無窮小 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 的正負號不一致，上述基本定理 I 可能不成立。爲了要修正一下，我們要引入一個有關正負號不一致的無窮小 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 的補充條件。

定義　無窮小之和 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu$ 將稱爲絕對有界，要是其絕對值之和 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+\cdots+|\mu|$ 是有界量，亦卽，要是任何時候我們恆有不等式
$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+\cdots+|\mu|<K,$$
(其中 K 是一個正的常量)的話。

基本定理 II　在求諸無窮小的絕對有界和的準確極限時，這些無窮小，可以用其均勻相當的無窮小來代，而不會改變該極限值。

證明　設 $\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu$ 是無窮小的絕對有界和，其極限 $\lim\sigma$ 是我們要求的。因爲按條件，σ 是無窮小的絕對有界和，所以無論何時，我們恆有不等式
$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+\cdots+|\mu|<K,\tag{12}$$
其中 K 是一個正的常量。

設新的無窮小 $\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \mu'$ 是跟 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ 均勻相當的，我們用 σ' 表示這些新無窮小的和：
$$\sigma'=\alpha'+\beta'+\gamma'+\cdots+\mu'。$$
由前面的和中減去新的和 σ'，得
$$\sigma-\sigma'=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')+(\gamma-\gamma')+\cdots+(\mu-\mu')。\tag{13}$$
由等式(6)，得：
$$\alpha-\alpha'=-\alpha''\alpha,\quad \beta-\beta'=-\beta''\beta,\quad \gamma-\gamma'=-\gamma''\gamma,\ \cdots,\quad \mu-\mu'=-\mu''\mu,\tag{14}$$
其中 $\alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots, \mu''$ 是均勻無窮小。這表示了，對於每一個給定的 ε，$\varepsilon>0$，由某瞬時起，我們有不等式：
$$|\alpha''|<\varepsilon,\quad |\beta''|<\varepsilon,\quad |\gamma''|<\varepsilon,\quad \cdots,\quad |\mu''|<\varepsilon。\tag{15}$$
把(14)與(15)式合併起來，得到不等式
$$|\alpha-\alpha'|<\varepsilon\cdot|\alpha|,\quad |\beta-\beta'|<\varepsilon\cdot|\beta|,\quad \cdots,\quad |\mu-\mu'|<\varepsilon\cdot|\mu|。$$
把這些不等式加起來，得：
$$|\alpha-\alpha'|+|\beta-\beta'|+\cdots+|\mu-\mu'|<\varepsilon(|\alpha|+|\beta|+\cdots+|\mu|)<\varepsilon K。\tag{16}$$

另一方面，由等式(13)，得

$$|\sigma-\sigma'|\leqslant|\alpha-\alpha'|+|\beta-\beta'|+\cdots+|\mu-\mu'|。$$

故根據(16)，得：

$$|\sigma-\sigma'|<\varepsilon K。$$

因爲 K 是一個常量，而 ε 是任意小的數，故得：

$$\lim(\sigma-\sigma')=0,$$

由此而知

$$\lim\sigma=\lim\sigma'。$$

（證明完畢）

6．結論　積分學原理最好寫爲下面的實用法則。

在計算無窮小的絕對有界和的極限時，總可以略去均勻高級的無窮小。

實際上，略去均勻高級的無窮小，就等於我們以另外的均勻相當的無窮小來代替原來的無窮小；不過積分學原理只允許：當討論的是無窮小的絕對有界和的極限時，才可以作這種置換。

§56．重心

設我們有 n 個質點 $M_1(x_1, y_1, z_2)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，…，$M_n(x_n, y_n, z_n)$的系統，質點的質量各等於 $m_1, m_2, \cdots, m_n$。我們假定這些點彼此間是不變地聯系着的。M_i 點的重量 P_i 是垂直的力，它的大小等於 m_ig（g 是重力加速度，對於所有物體，g 都是一樣的）。整個質點系統的質量 m，等於其各個質點的質量之和：$m=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$；又整個質點系統的重量，等於各點的重量之和：$p=p_1+p_2+\cdots+p_n$。

力學中證明：坐標按公式

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum m_ix_i}{m}\\ \bar{y}&=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum m_iy_i}{m}\\ \bar{z}&=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum m_iz_i}{m}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

所決定的點 $M(x, y, z)$，也是與質點系統 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 不變地聯系着的，又假若在這一點 M 處施以向上的力 p，且該質點系統原來是靜止的話，則不論該質點系統的方位如何，它將保持平衡。

$\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$這一點，稱爲質點系統 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的重心。

力學中又證明了：當我們不知道整個質點系統的重心，但是，若把該系統在想像中分爲許多小部分，而知道了每一部分個別的重心時，則整個質點系統的重心仍然可以用公式(1)求出；不過公式中的 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，應認爲不是各點的質量，而是該系統各部分的質量；又 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$，…，$M_n(x_n, y_n, z_n)$，現在應是各部分的重心了。

力學的這個命題，具有極大的重要性，因爲在它之上建立了求連續系統的重心的方法，這些連續系統如曲線、曲面及實體等。爲此目的，我們引入物質有連續性的假設而把求和法變爲積分法。由於這個緣故，物理的問題就變成純粹幾何的問題了。

我們從連續系統的均勻性開始；連續系統叫做均勻的，假若在該系統各點處，都有同一物理結構的話。連續均勻系統的密度 ρ，是該系統任何部分的質量與該部分的空間容積(長度，面積，體積)之常數比。假若 m 是該系統所討論部分的質量，v 爲其空間容積，ρ 是整個系統的密度，則我們有 $\rho=\frac{m}{v}$，由此，$m=\rho\cdot v$。因此，對力學概念質量 m 的研究，就變到對正比於它的幾何空間容積 v 的研究了。

此外，一些最簡單的幾何系統，常可很快的求出其重心，因爲重心常與其幾何中心相重合(假若它有幾何中心的話)。例如矩形或平行四邊形的重心，是與其幾何中心相重合的；又直線的重心爲其中點，等等。

利用這些，首先把已給的連續系統(它的重心，是我們要尋求的)在想像中分爲許多極小部份，這些小份就取爲簡單的幾何元素❶，它們的重心是很容易求出來的。然後利用公式(1)，求這些元素之和的重心。最後取極限，亦卽令小份無限減小，而且個數 n 無限增加；在極限下，我們就得到連續系統的所求重心。取極限時，公式(1)中的和就變

❶ 略去均勻高級的無窮小(參閱 § 55)。

爲積分了。就是說，我們有：

$$\bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm},\quad \bar{y}=\frac{\int ydm}{\int dm},\quad \bar{z}=\frac{\int zdm}{\int dm}。\tag{2}$$

假若像上面所講過的，我們把所論連續系統看作是均勻的，則可有 $m=\rho v$，其中 ρ 是常量（＝整個系統的密度），m 是該小份的質量，v 爲其空間容積。在這種情形下，我們有 $dm=\rho dv$，公式（2）就變爲：

$$\bar{x}=\frac{\int x\rho dv}{\int \rho dv}=\frac{\rho\int xdv}{\rho\int dv}=\frac{\int xdv}{V}$$

同樣，又有：

$$\bar{y}=\frac{\int ydv}{V},\quad \bar{z}=\frac{\int zdv}{V},\tag{3}$$

其中 V 是所給整個連續系統的容積（長度，面積，體積）。

假若所給連續系統不是均勻的，則質量與容積之比 $\frac{m}{v}$ 要依賴於該系統中所選取的（在想像中分割出的）部分。在這種情形，這個比值就稱爲平均密度。當該系統的這一部分縮爲一點時，則該部分的平均密度趨近於極限 ρ，它就稱爲這系統在該點的密度。在這種情形，我們有 $\rho=\frac{dm}{dv}$，而 ρ 是一個變量，依賴於系統中所討論的點的位置 (x, y, z)，也就是說它是一個函數 $\rho(x, y, z)$，現在就不能從積分號內取出來了。因此，對於非均勻的連續系統，公式（2）得到下面的形式：

$$\bar{x}=\frac{\int x\rho dv}{\int \rho dv},\quad \bar{y}=\frac{\int y\rho dv}{\int \rho dv},\quad \bar{z}=\frac{\int z\rho dv}{\int \rho dv}。\tag{4}$$

欲求所得公式中的積分時，積分號內的表達式，應當用單獨一個變量表達出來；積分的上下限，則由問題中的具體條件來決定。

例 1. 試求(第一象限中)四分之一個圓周 $x^2+y^2=a^2$ 的重心。

解 將圓弧分爲 n 份(圖 48)，用 ρ 表示曲線的線密度，得❶：

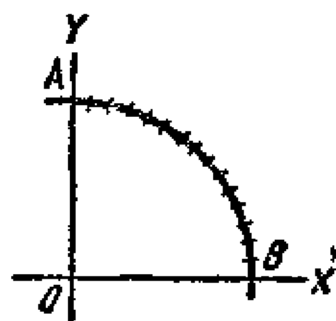


圖 48.

$$dm=\rho ds。$$

因此，
$$\bar{x}=\frac{\int \rho x ds}{\int \rho ds},\quad \bar{y}=\frac{\int \rho y ds}{\int \rho ds}。$$

把密度作爲常量從積分中拿出來，又把它消去。於是兩式中分母都是 s。爲求分子，應用公式 $ds^2=dx^2+dy^2$，在現在這種情形下，$ds=\frac{a}{y}dx=-\frac{a}{x}dy$，又因我們取 A 點爲弧長 s 的起點，故 $ds>0$ 時，dx 是正量，而 dy 是負量。

因此，
$$\int x\,ds=-\int_a^0 a\,dy=a^2,\quad \int y\,ds=\int_0^a a\,dx=a^2,\quad \int ds=\frac{\pi a}{2}。$$

這樣便得到：
$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{2a}{\pi}。$$

例 2. 求例 1 中第一象限內四分之一個圓弧的重心，但是在一個條件之下，即：若弧長 s 由 B 點算起，線密度是正比於弧長的。

解 在現在的情形下：
$$dm=ks\cdot ds。$$

爲了容易計算積分起見，今應用圓的參量方程：
$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,$$

於是得：
$$\bar{x}=\frac{\int sx\,ds}{\int s\,ds}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\varphi\,d\varphi}=\frac{4\pi-8}{\pi^2}a;$$

$$\bar{y}=\frac{\int sy\,ds}{\int s\,ds}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\varphi\,d\varphi}=\frac{8a}{\pi^2}。$$

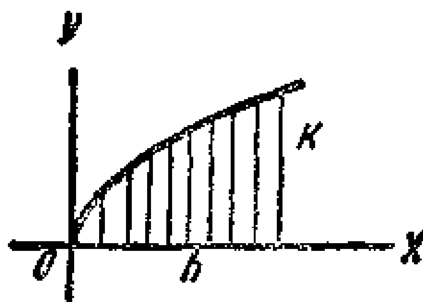


圖 49

例 3. 試求由拋物線 $y^2=4px$，OX 軸及曲線上 $(h,\ k)$ 點的縱坐標所圍成的面積的重心(圖 49)。

解 將面積分爲 n 份，則面積元素等於 $y\,dx$，其中 y 爲曲線上點的縱坐標。以 ρ 表示

---

❶ 所謂平均線密度，就是分佈在圓弧上的點的質量對其長度之比。在一點的線密度，則是當弧長向該點收縮時平均線密度的極限。

面積的密度，我們有：

$$dm=\rho y\,dx\,。$$

在 $\rho=$常量的情形下，我們可以把這塊小面積的質量看做集中在面積元素的 $\left(x,\frac{y}{2}\right)$ 點，則

$$\bar{x}=\frac{\int_0^h x\rho y\,dx}{\int_0^h \rho y\,dx},\quad \bar{y}=\frac{\int_0^h \frac{y}{2}\rho y\,dx}{\int_0^h \rho y\,dx}。$$

從曲線方程，用 x 表達 y，得：

$$\int_0^h xy\,dx=2p^{\frac{1}{2}}\int_0^h x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}p^{\frac{1}{2}}h^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}h^2k,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^h y^2dx=2p\int_0^h x\,dx=ph^2=\frac{1}{4}hk^2,$$

$$\int_0^h y\,dx=2p^{\frac{1}{2}}\int_0^h x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{4}{3}p^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}hk。$$

總之，若把密度 ρ 算作常量時，得：

$$\bar{x}=\frac{3}{5}h,\quad \bar{y}=\frac{3}{8}k。$$

例 4．試求面積 BDE（圖 50）繞 OY 軸旋轉所得的球塊的重心，並已知 $OB=a, OE=c$。

解 用垂直於 OY 軸的平面將球塊分爲 n 個體積元素。體積元素的體積等於 πx^2dy。因此

$$dm=\rho\pi x^2dy\,。$$

在 $\rho=$常量的條件下，這塊體積元素的質量，可以當作集中於 $(0, y)$ 點，亦即集中於元素底面的中心。因此，在這種情形，球塊重心的橫坐標爲零，而縱坐標等於

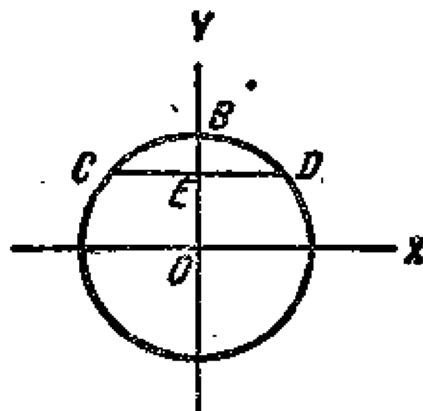


圖 50.

$$\bar{y}=\frac{\int_c^a y(\rho\pi x^2dy)}{\int_c^a \rho\pi x^2dy}=\frac{\int_c^a (a^2y-y^3)dy}{\int_c^a (a^2-y^2)dy}=\frac{3}{4}\;\frac{(a+c)^2}{2a+c}。$$

例 5．求例題 4 中那個球塊表面的重心。

解 以垂直於 OY 軸的平面，將該部份球面分爲面積元素，則面積元素的面積爲 $2\pi x ds$，又

$$dm=2\pi\rho x\,ds\;(\rho=\text{常量})。$$

這塊面積元素的質量，可當作集中在 $(0, y)$ 點。由圓方程，求得 $ds=\frac{a\,dy}{x}$；總之，

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\frac{\int xy\,ds}{\int x ds}=\frac{\int_c^a y\,dy}{\int_c^a dy}=\frac{a+c}{2}。$$

習　題

（在各題中均假定密度為常量）

1．求 OX 軸上，半圓 $x^2+y^2=a^2$ 之重心。　　答 $\left(0,\ \frac{2a}{\pi}\right)$。

2．求內擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在 OX 軸上之弧的重心。　　答 $\left(0,\ \frac{2a}{5}\right)$。

3．求第一象限中，四分之一個橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積重心　　答 $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$。

4．求雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 及直線 $y=0, y=b$ 之間的面積繞 OY 軸旋轉所得的旋轉體的重心。　　答 $\bar{y}=\frac{9}{16}b$。

5．求繞 OX 軸，旋轉拋物線 $y^2=4px$，OX 軸及直線 $x=a$ 之間的面積所得的物體的重心。　　答 $\bar{x}=\frac{2a}{3}$。

6．求半立方拋物線 $ay^2=x^3$ 及任意二縱坐標所圍成的面積的重心。

答 $\left(\frac{5h}{7},\ 0\right)$，其中 $x=h$ 為縱坐標的方程。

7．求正弦曲線及 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之 OX 軸所圍成的面積的重心。　答 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$。

8．求拋物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 及二坐標軸之間的面積之重心。　　答 $\left(\frac{a}{5},\ \frac{a}{5}\right)$。

9．求懸鏈線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 由 $x=0$ 的點到 $x=a$ 的點之間的弧段的重心。

答 $\left(\frac{2a}{e+1},\ \frac{a(e^4+4e^2-1)}{4e(e^2-1)}\right)$。

10．求第一象限中內擺線 $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$ 的面積重心。

答 $\left(\frac{256a}{315\pi},\ \frac{256a}{315\pi}\right)$。

11．求第一象限中，由橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，圓 $x^2+y^2=a^2$ 及 OY 軸所圍面積之重心。

答 $\left[\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4(a+b)}{3\pi}\right]$。

12．求擺線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 介於其在 OX 軸上頭兩點之間的弧段的重心。　　答 $\left(\pi a,\ \frac{4}{3}a\right)$。

13．試證明：圓扇形的重心，在其所張角 α 的等分線上，且距離頂點 $\frac{2}{3}a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$（$a$ 為圓之半徑）。

14. 試求繞極軸旋轉雙紐線 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 之一組線所得曲面的重心。

答　$\bar{x}=\frac{a}{3}(\sqrt{2}+1)$。

15. 試證明：旋轉平面曲線(繞該曲線所在平面中的一根軸)所得曲面面積，等於該曲線弧之重心旋轉時所畫的圓周長與曲線弧長的乘積。

16. 試證明：旋轉平面圖形(繞該圖形所在平面中的一根軸)所得物體體積，等於該圖形之面積重心在旋轉時所畫的圓周長與圖形面積的乘積。

§57. 流體壓力。功

我們現在討論浸沒在流體中的垂直板上所受流體壓力的計算問題。

假設 $ABCD$(圖 51)是浸沒在流體中的垂直板的一部分，例如裝滿流體的盛器的垂直器壁。現在要計算這塊面積上所受的流體壓力。取坐標軸如圖所示，圖中 OY 軸位在流體的表面。將 AB 線段分爲 n 個小區間，並作 n 個矩形如圖 51 中所示。一個矩形(如 EM 矩形)的面積，等於 $y\Delta x$。假若該矩形是在容器內流體表面下深度 x 處的水平面上，則作用在該矩形上的流體壓力等於 $wxy\Delta x$❶，式中 w 爲流體單位體積的重量。因爲流體的壓力各個方向都是一樣的，故由此可知，$wxy\Delta x$ 是作用於板上的壓力元素；因此，整塊板 $ABCD$ 上所受的壓力 P 等於

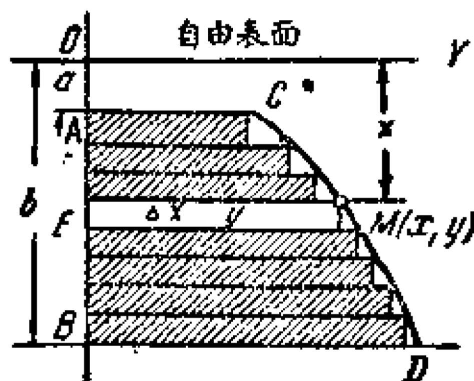


圖 51.

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} wx_iy_i\Delta x_i=w\int_a^b xy\,dx, \qquad (5)$$

實際上，按公式(5)計算的時候，要先從(包圍着這塊板的)曲線 CD 的方程中把 y 表達爲 x 的函數。

以後每立方公尺的水的重量算作 1000 公斤($=w$)。

❶ 流體作用於小塊水平面上的壓力，等於以該小塊平面爲底、平面到流體自由表面的距離爲高的流體柱的重量。

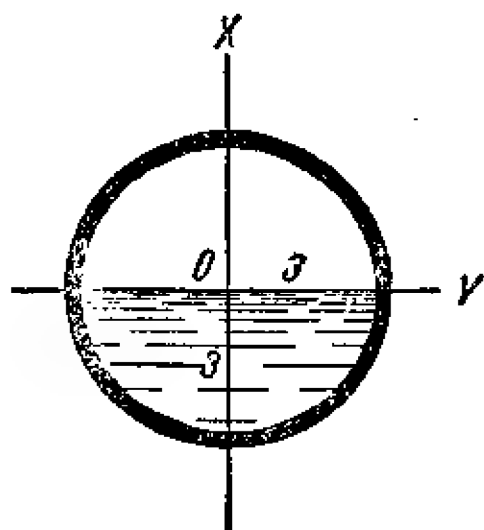


圖 52.

例　一斷面爲圓的水管，直徑爲6米，水平的放着，裏面的水是半滿的。今求水管的豎立閘門上所受的壓力。

解　圓的方程是

$$x^2+y^2=9,$$

故 $y=\sqrt{9-x^2}$，又 $w=1000$，積分上下限各是 $b=3$，$a=0$。

把這些數值代入公式(5)，卽得 OX 軸右邊閘門的豎立部分上所受的壓力(圖52)：

$$1000\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1000}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=9000。$$

因此整個閘門上所受的壓力是：

$$P=2\cdot 9000=18000\text{ 公斤}。$$

習　題

1. 一塊矩形板浸在水裏，其底是8米，高爲12米，上頂與水的自由表面平行，並離表面5米深。求矩形上所受之水壓。　　答　1056 噸。

2. 一水壩爲梯形，其兩水平邊各長400米及100米，其高等於20米。上面大的底邊自由水面齊，求壩上所受之壓力。　　答　40000 噸。

3. 一球面其直徑爲6米，浸入水中，其球心在自由水平面下10米，求球面上所受壓力。　　答　360000π 公斤。

提示　壓力等於

$$2\pi w\int_{-3}^{+3} y(10+x)\,ds,\qquad \text{其中 } ds=\frac{3dx}{y}。$$

功　假若作用力與運動方向一致，而且是一個常量，則所謂力所作的功，就是作用力乘以質點所走的距離 s_1-s_0（s_1 爲質點運動之末點，s_0 爲起點）假若力是改變着的，則功只能用極限方法來決定。我們把整個距離由 s_0 至 s_1 分爲 n 份，並假定在每一個小區間中力是常量，例如等於力在該區間中任意一點 s 處所取的數值 $f(s)$。這樣，乘積 $f(s)ds$ 就給出了功的元素，而力所作的整個功量 W，可表達爲

$$W=\lim\sum f(s)ds=\int_{s_0}^{s_1} f(s)ds。\qquad (6)$$

假若作用力與運動方向一致，則所作的功是正的（所消耗的正的功）；反之，所作的功是負的（所獲得的功）。

例　試計算拉長彈簧5厘米所作的功。設已知彈簧拉長所需的力與彈簧的伸長成正比，又彈簧伸長1厘米時所需的力爲1公斤。

解　題中所作用的力，顯然等於 kx，其中 k 爲比例係數。因彈簧伸長1厘米所需的力爲1公斤，故 $x=0.01$ 時，$kx=k\cdot 0.01=1$。由此可知 $k=100$。彈簧係由平衡位置 $x_0=0$ 拉至 $x_1=0.05$，故按公式（6）得：

$$W=\int_0^{0.05} 100x\,dx=50\left[x^2\right]_0^{0.05}=0.125\text{ 公斤米。}$$

習　題

1．一物體按規律 $x=ct^3$ 作直線運動，式中 x 爲時間 t 內所通過的距離，媒質的阻力正比於速度的平方，試求物體由 $x=0$ 至 $x=a$ 點時，阻力所作之功。

答　$\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$ 其中 k 爲阻力係數。

2．由一半球（直徑爲20米）形的容器內，把水抽盡，試計算所必須作的功（圖53）。

答　$2.5\times10^6\pi$ 公斤米。

提示　我們考察於旋轉軸、離自由水面 x 處的平面所割容器之斷面。該斷面之面積等於 πy^2；作用在這斷面上，有整個水柱的壓力（水柱的底爲斷面積，高爲 x），亦卽壓力爲 $w\pi y^2x$，其中 w 是單位體積流體的重量。這個力可以認爲作用在斷面的重心上，其方向與旋轉軸相重合（卽 OX 軸）。因此公式（6）中的力，現在是 $w\pi y^2x$。所求之功爲

$$W=w\pi\int_a^b xy^2dx。$$

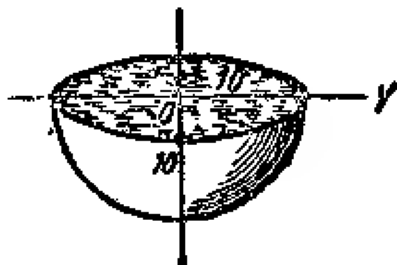


圖　53.

現在再舉一些典型例子，來說明積分學的應用方法。



圖　54.

例1.　細直桿 AB 是均勻的，厚度各處一樣，其長爲 l，質量爲 M。在它的延長線上，距其一端 a 單位長處，有一質量爲 m 的質點 N。試求該直桿與 N 點之間的吸力。

解　設想該直桿被分爲許多無窮小的等分（元素），每分長 dx。因爲整個桿子的質量是 M，故元素 dx 的質量是 $\frac{M}{l}\cdot dx$，由於桿子單位長之質量爲 $\frac{M}{l}$。

按牛頓定律，二質點之間的吸力係由下式表達：

$$吸力=常數\times\frac{二質量之乘積}{(二質量之間的距離)^2}。$$

因此 N 點與桿的元素 dx 之間的吸力等於：

$$\delta\cdot\frac{m\cdot\frac{M}{l}dx}{(x+a)^2}。$$

其中 δ 爲常數，上式給出了所求吸力的元素。質點N與直桿之間的整個吸力，是所有這些吸力元素由 $x=0$ 至 $x=l$ 之和的極限，亦即：

$$\int_0^l\frac{\delta\frac{M}{l}m\,dx}{(x+a)^2}=\delta\frac{Nm}{l}\int_0^l\frac{dx}{(x+a)^2}=-\delta\frac{Mm}{a(a+l)}。$$

假若在這題中，設質點 N 是在直桿的中垂線上距離直桿 a 單位長的地方，請讀者求直桿吸引質點之力。 答 $\delta\frac{2mM}{al}\arc\tan\frac{l}{2a}$。

例 2. 一盛器的形狀是一正圓錐形(圖 55)，裏面裝滿了水。假若錐的高是 h，底半徑是 r，並設錐頂處有一面積 a 的小孔，問要花多少時候水才流得完。

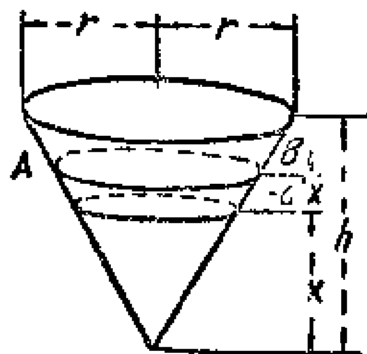


圖 55.

解 大家都知道，若忽視各種阻力，則孔處的水流速度等於從(高度爲水深的)高處自由落下的物體所得的速度。設深度爲 x，故得：

$$v=\sqrt{2gx}。$$

設在 dt 時間內，流出 dQ 這些水，且水平面降下了 dx。在單位時間內，由孔中流出的水的體積是 $a\sqrt{2gx}$——這是底面積爲 a，高爲 $v(=\sqrt{2gx})$的圓柱形的體積。因此在 dt 時間內流出的水是：

$$dQ=a\sqrt{2gx}\,dt。\qquad (a)$$

但是在 dt 時間內流出的水，也可以作爲是柱形 AB 的體積；該柱形之底面積爲 S，高爲 dx。由此，

$$dQ=S\,dx=\frac{\pi r^2x^2dx}{h^2}。\qquad (b)$$

令(a)與(b)相等，並解出 dt 來，得 $dt=\frac{\pi r^2x^2dx}{ah^2\sqrt{2gx}}$，由此得：

$$t=\int_0^h\frac{\pi r^2x^2dx}{ah^2\sqrt{2gx}}=\frac{2\pi r^2\sqrt{h}}{5a\sqrt{2g}}。$$

例 3. 以活塞封閉圓柱筒中的理想氣體，氣體膨脹時推動活塞。設氣體體積從 v_0 膨脹至 v_1 又膨脹時溫度不變。試求氣體壓力對活塞所作之功。

解 設 c 爲圓柱筒之斷面積，又 dv 表示氣體體積之增量，則 $\frac{dv}{c}$ 給出了相應的活塞移動

的增量。

按波義耳-馬利奧脫定律 $pv=k=$常量，故 $p=\frac{k}{v}$，它是氣體作用於活塞的單位面積上的力。又 $p=\frac{kc}{v}$ 等於作用於整個活塞上的力。因此體積增加 dv 時所作的功，等於

$$\frac{kc}{v}\cdot\frac{dv}{c}\ (\text{壓力}\times\text{活塞移動的距離})。$$

由此可得

$$W=\int_{v_0}^{v_1}\frac{k\,dv}{v}=k\ln\frac{v_1}{v_0}。$$

第五章　公式積分法的各種方法

§58.　引言

積分法，如果歸根結底，是用積分表來做的，就叫做公式積分法。如果在某個所討論的情形中，表中並沒有積分是跟所給積分類似的，則常常還總可能將後者變換一下，使其只依賴於表中的公式。

把所給積分推到積分表的各種方法如下：

(a)分部積分法，

(b)應用有理分式積分法的理論，

(c)用適當置換。

第一個方法已在§18中講過，現在我們來講剩下的兩個方法。

§59.　有理分式的積分法

有理分式是這種分式，它的分子及分母都是多項式(整有理函數)。假若分子的次數等於或高於分母的次數，則用分母除分子後，可將分式化爲一混合表達式。例如：

$$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}=x^2+x-3+\frac{5x+3}{x^2+2x+1}。$$

最後一項是一個眞分式，因其分子的次數已低於分母的次數。顯然，多項式部分可立即積出來，所以我們只要討論這個眞分式的積分法。

爲着積出這種分式，常常必須把它分爲許多所謂"分項分式"(簡單元素)，亦即把原分式換成一些新分式的代數和，這些新分式的形式與積分法是以後要講到的。在代數學中已證明了，假若我們會把分母分解爲實因子(一次或二次的)，那末這種分項分式的展開是總可實現的。

第一種情形　分母的因子全是一次的，沒有重因子。代數學中已

經證明了，對於分母 $F(x)$ 中每一個不重複出現的一次因子，例如 $x-a$，都對應了一個分項分式 $\frac{A}{x-a}$。這種分式可以立即積出如下：

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln(x-a)+C。$$

例　求 $\int\frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$。

解　分母之因子爲 $x,\ x-1,\ x+2$，設

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},\tag{1}$$

其中 A,B,C 爲待決定的常數。由（1）式得：

$$\begin{aligned}2x+3&=A(x-1)(x+2)+B(x+2)x+C(x-1)x=\\&=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A。\end{aligned}\tag{2}$$

因該式爲恆等式，按未定係數法，我們令兩邊 x 的同冪項的係數相等，得到三個聯立方程：

$$\begin{aligned}A+\ B+C&=0,\\A+2B-C&=2,\\-2A\qquad\quad&=3,\end{aligned}\tag{3}$$

解之，求得：

$$A=-\frac{3}{2},\ B=\frac{5}{3},\ C=-\frac{1}{6}。$$

將這些數值代入（1），得：

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}。\tag{1}$$

由此

$$\int\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)+\ln c=\ln\frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}。$$

從（2）中求數值 A,B,C 的更簡捷的方法如下：在等式（2）中設 $x=0$，故 $3=-2A$，或 $A=-\frac{3}{2}$。又設 $x=1$，得 $5=3B$，或 $B=\frac{5}{3}$，設 $x=-2$，得 $-1=6C$ 或 $C=-\frac{1}{6}$。

習　題

1. $\int\frac{(x-1)dx}{x^2+6x+8}=\ln\frac{c(x+4)^{\frac{5}{2}}}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}$。

2. $\int\frac{(3x-1)\,dx}{x^2+x-6}=\ln[c(x+3)^2(x-2)]$。

3. $\int\frac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3+x^2-6x}=\ln\sqrt[6]{x(x-2)^3(x+3)^2}+C$。

4. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}+C$。

5. $\int\frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{(x+1)^3}+\frac{16}{3}\ln(x+2)+C$。

6. $\int\frac{(a-b)y\,dy}{y^2-(a+b)y+ab}=\ln\frac{(y-a)^a}{(y-b)^b}+C$。

7. $\int\frac{(t^2+pq)\,dt}{t(t-p)(t+q)}=\ln\frac{(t-p)(t+q)}{t}+C$。

8. $\int\frac{(2z^2-5)\,dz}{z^4-5z^2+6}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+C$。

第二種情形　分母的因子全是一次的，但有些是重因子。在代數學中，已證明了，對於分母 $F(x)$ 中每一個 n 重的一次因子，例如 $(x-a)^n$，對應了下面這種 n 個分項分式的和：

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{L}{x-a},$$

其中，$A, B, \cdots, L$ 爲常數。

最後一個分式的積分法，跟第一種情形一樣；其餘各式，可按乘冪的積分公式來積分。如

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C。$$

例　求 $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$。

解　因 $(x-1)$ 是三重因子，故設：

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)}。$$

通分，去掉分母，得

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2=$$
$$=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A。$$

令 x 同冪項的係數相等，得四個聯立方程

$$A+D=1,$$
$$-3A+C-2D=0,$$

$$\begin{aligned}3A+B-C+D&=0,\\ -A\qquad\qquad&=1。\end{aligned}$$

解之，得 $A=-1$，$B=2$，$C=1$，$D=2$。故

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}。$$

因此得

$$\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx=-\ln x-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}+2\ln(x-1)+C=$$

$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x}+C。$$

習　題

1. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$。

2. $\int\frac{(x-8)dx}{(x^3-4x^2+4x)}=\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$。

3. $\int\frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}=\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$。

4. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}=-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$。

5. $\int\frac{y^2dy}{y^3+5y^2+8y+4}=\frac{4}{y+2}+\ln(y+1)+C$。

6. $\int\frac{dt}{(t^2-2)^2}=-\frac{t}{4(t^2-2)}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}+C$。

7. $\int\frac{as^2ds}{(s+a)^3}=a\ln(s+a)+\frac{2a^2}{s+a}-\frac{a^3}{2(s+a)^2}+C$。

8. $\int\left(\frac{m}{z+m}-\frac{nz}{(n+z)^2}\right)dz=\ln(z+m)^m(z+n)^{-n}-\frac{n^2}{z+n}+C$。

9. $\int\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx=-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$。

第三種情形　分母包含二次因子，這種二次因子都不是重因子且不能分解爲實係數的一次因子。在代數學中已證明，在這種情形下，對於分母 $F(x)$ 中每一個非重的二次因子，例如 x^2+px+q，對應了一個分項分式：

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}。$$

這種分式一般可積分如下：

$$\int\frac{(Ax+B)}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}-\frac{Ap}{2}+B\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$\left[\text{分子上加 }\frac{Ap}{2}\text{，又減去 }\frac{Ap}{2}\right]$

$$=\int\frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx+\int\frac{\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx+\frac{2B-Ap}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

[把第二個積分的分母配方]

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C。$$

這裏要注意：三項的二次式 x^2+px+q，當自變量變化時，不能等於零。假若在 x 的某個實數處變爲零，則無異於說：二次方程 x^2+px+ $+q=0$ 具有一個實根 α。那麼該二次方程的另一個根 β 也是實的了。這樣我們就會有恆等式：

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)。$$

但是，我們早已假定了三項式 x^2+px+q 是不能分解爲實係數一次因子的。

由於這個緣故，三項式 x^2+px+q 不再能變號（否則就具有實根）。因此，無論 x 如何變化，這個三項式總是正的（因爲 $x=+\infty$ 時，它是正的）。

我們所以要講這些話，是爲了使我們總可以大膽取這三項式的對數，寫出 $\ln(x^2+px+q)$，而不必躭心會遇到負數的對數。

這裏還要加一句，我們一定有不等式 $p^2-4q<0$，亦卽恆有 $4q-$ $-p^2>0$；因爲只有當這個不等式成立，方程才沒有實根（如初等代數上

所講的)。因此表達式$\sqrt{4q-p^2}$是一個正數。

例　求$\int\frac{4dx}{x^3+4x}$。

解　設$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$。

通分,去掉分母,得:

$$4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=(A+B)x^2+Cx+4A。$$

令x的同冪項的係數相等,得:

$$A+B=0,\ C=0,\ 4A=4。$$

由此,得

$$A=1,\ B=-1,\ C=0。$$

故

$$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}。$$

因之,

$$\int\frac{4dx}{x(x^2+4)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\ln c=\ln\frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}。$$

習　題

1. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C。$

2. $\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C。$

3. $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\arctan x+C。$

4. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan x+C。$

5. $\int\frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}=\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C。$

6. $\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C。$

7. $\int\frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}=\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C。$

8. $\int\frac{z^2dz}{z^4+z^2-2}=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{z}{\sqrt{2}}+C。$

9. $\int\frac{4dt}{t^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\arctan\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C。$

10. $\int\frac{dy}{1-y^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{y^2+y+1}{y^2-2y+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+C。$

第四種情形 分母包含二次因子,這些因子既不能分解爲實係數的一次因子,而且其中有些還是重因子。在代數中已經證明,在這種情形,對於分母 $F(x)$ 中每一個 n 重的二次因子,例如$(x^2+px+q)^n$,都對應了一個由 n 項所組成的分項分式,如:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)}。\qquad (A)$$

我們注意分母的次數,和式中首項的次數最高,末項的次數最低。

我們已經會積分最後的一項了,因爲這就是第三種情形中所討論的。

爲着求高次項的積分,必須引用所謂"簡化公式":

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right],\quad (B)$$

有了這個公式,我們就能把高次項 $\frac{1}{(u^2+a^2)^n}$ 的積分法,化爲較低次項 $\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}$ 的積分法。

讀者可以直接用微分法來證明這個"簡化公式"(B)是正確的。

當 p 不等於零時的一般情形,可化爲上述分項分式,因爲我們可以將分母配方:

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(4q-p^2),$$

其中一定有 $4q-p^2>0$。今設 $x+\frac{p}{2}=u$, $\frac{1}{4}(4q-p^2)=a^2$, 我們有:
$x^2+px+q=u^2+a^2$; 同時 $dx=du$, $x=u-\frac{p}{2}$。

因此,一般情形可以照着下面這樣來化:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{A^*u+B^*}{(u^2+a^2)^n}du=\frac{A^*}{2}\int\frac{2u\,du}{(u^2+a^2)^n}+$$

$$+B^*\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{A^*}{2}\int\frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}+B^*\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=$$

$$=\frac{A^*(u+a^2)^{-n+1}}{2(1-n)}+B^*\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n},\quad n>1。$$

由此顯然可見，利用簡化公式(B)，(A)式中的 n 次項積分可以化爲同一類型的積分，不過其中二次因子的冪指數只有 $n-1$ 了。接連把簡化公式應用 $n-1$ 回，顯然，我們最後就把積分化爲冪指數 $n=1$ 的情形了。而冪指數 $n=1$ 的積分，已在第三種情形中討論過了。

這樣，我們可以把(A)式中各分式積出來，除去最後一項，但它的積分法已在第三種情形中講過。

例　證明：

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\ln(x^2+1)+\frac{1+3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\arctan x+C。$$

解　因爲 x^2+1 是二種因子，我們應有：

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}。$$

通分，去掉分母，得：

$$2x^3+x+3=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)。$$

再用未定係數法，令兩邊 x 的同冪項的係數相等，解出後，求得：

$$A=-1,\ B=3,\ C=2,\ D=0。$$

故：

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\ln(x^2+1)-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}+3\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}。$$

右邊第一個積分，可按乘冪積分的公式 IV 來求；第二個積分，要應用一次簡化公式(B)，其中 $u=x$, $a=1$, $n=2$。因此得到：

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\left[\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right]+C.$$

歸併同類項後，卽得題中答案。

結論　因爲每一個有理函數，總可以化爲兩個整有理函數的商(亦卽化爲有理分式)，故由本章上述各節卽知：任意一個有理函數，如果我們能把它的分母分解爲實係數的一次及二次因子，那它就可以表示爲整有理函數及分項分式之和。該和中所有項的形式，都是可用上述方法來積分的。由此得

定理　每一個有理函數，如果我們能把它的分母分解爲實係數的一次及二次因子，那末就可以求出它的積分。這積分是用代數函數、對數函數及反三角函數來表達的，也就是說，歸根到底是用初等函數來表

達的。

習 題

1. 求$\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}$。

解 因(x^2+2)爲二重因子，故設

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}。$$

通分，去掉分母，得：

$$x^3+x^2+2=Ax+B+(Cx+D)(x^2+2)=Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+B+2D。$$

令x的同冪項的係數相等，求得：

$$C=1,\ D=1,\ A+2C=0,\ B+2D=2,$$

由此得 $$A=-2,\ B=0,\ C=1,\ D=1,$$

隨之： $$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+2}。$$

故： $$\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}=-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}+\int\frac{x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+C。$$

2. $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx=\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+C。$

3. $\int\frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C。$

4. $\int\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}dx=\frac{5}{2(x^2+2)}+\frac{10}{x^2+3}+\frac{19}{2}\ln(x^2+2)-9\ln(x^2+3)+C。$

5. $\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tan}x+C。$

6. $\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2-3x+3)^2}=\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C。$

§60. 用新變量作置換的積分法；有理化

在上節中已經講過：所有的有理函數(表達式)，都可以積分出來，只要我們會把它的分母分解爲一次及二次的實係數的因子。至於非有理函數的代數函數，例如包含根號的代數函數，那就(相對地說)只有一小部分是可以積分出來的，亦卽只有一小部分具有可以用初等函數表

達的積分。可是，在有些情形，作變量置換，可能把上述積分化爲直接包含在表中的積分，或者化爲有理函數的積分形式。

利用新變量的函數來置換老變量，使非有理函數的積分變爲有理函數的積分形式，這種方法稱爲有理化方法。

這是積分中極重要的一個方法，我們應當討論這一類方法中一些最重要的情形。

微分包含 x 的分數冪項的情形　利用 $x=z^n$，其中 n 爲各分數冪分母的最小公倍數，可將這種表達式化爲有理形式。因爲利用這個方法，x、dx 及每個 x 的分數冪項都可以表達爲 z 的有理函數。

例　求
$$\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx_{\circ}$$

解　因各分數冪分母的最小公倍數爲 12，

故設：
$$x=z^{12}_{\circ}$$

這裏：
$$dx=12z^{11}dz,\quad x^{\frac{2}{3}}=z^8,\quad x^{\frac{1}{4}}=z^3,\quad x^{\frac{1}{2}}=z^6_{\circ}$$

隨之，
$$\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\frac{z^8-z^3}{z^6}12z^{11}dz=12\int(z^{13}-z^8)dz=$$
$$=\frac{6}{7}z^{14}-\frac{4}{3}z^9+C=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C_{\circ}$$

[反過來將 z 表達爲 x 的函數，即 $z=x^{\frac{1}{12}}$]。

這裏所討論的非有理表達式的一般形式是：
$$\int R(x,\ x^{\alpha},\ x^{\beta},\ \cdots)dx,$$

其中 $\alpha,\ \beta,\cdots$ 爲有理數，$R(x,\ y,\ z,\cdots)$ 是字母 $x,\ y,\ z,\cdots$ 的有理函數。

微分包含 $a+bx$ 的分數冪項的情形　利用置換
$$a+bx=z^n,$$

其中 n 是 $a+bx$ 的各分數冪分母的最小公倍數，可將這種表達式變爲有理形式。因爲，這樣就可把 x、dx 及每一個根號（卽每一個 $a+bx$ 的分數冪項）都表達爲 z 的有理函數。

例　求
$$\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}。$$

解　設
$$1+x=z^2;$$

則
$$dx=2z\,dz,\quad (1+x)^{\frac{3}{2}}=z^3,\quad (1+x)^{\frac{1}{2}}=z。$$

隨之，
$$\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{2z\,dz}{z^3+z}=2\int\frac{dz}{z^2+1}=$$
$$=2\arctan z+C=2\arctan(1+x)^{\frac{1}{2}}+C。$$

［反過來以 x 的函數代 z］。

這裏所討論的積分的一般形式是：
$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\cdots\right]dx,$$
其中 $R(x, y, z, \cdots)$ 是字母 $x, y, z, \cdots$ 的有理函數，又 $\alpha, \beta, \cdots$ 爲有理數。置換公式是 $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$，其中 n 是有理數 $\alpha, \beta, \cdots$ 分母的最小公倍數。

習　題

1. $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}=\frac{4}{3}[x^{\frac{3}{4}}-\ln(x^{\frac{3}{4}}+1)]+C。$

2. $\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}}+2\ln\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+4\arctan x^{\frac{1}{8}}+C。$

3. $\int\frac{dx}{x(x+1)^{\frac{1}{2}}}=\ln\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+1}+C。$

4. $\int\frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}+C。$

5. $\int y\sqrt{a+y}\,dy=\frac{2}{15}(3y-2a)(a+y)^{\frac{3}{2}}+C。$

6. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx=x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+C。$

7. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C。$

8. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C。$

9. $\int x\sqrt[4]{x-2}\,dx=\frac{20x+32}{45}(x-2)\sqrt[4]{x-2}+C$。

10. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+a}}=\frac{6x-9a}{10}\sqrt[3]{(x+a)^2}+C$。

§61. 二項式微分

這就是下面形式的積分

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

其中 a 及 b 爲不等於零的任意常數；m, n 及 p 均爲有理數。

利用置換　$x^n=t$, 卽 $x=t^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$。

可將積分變爲：　$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt。$$

設 $q=\frac{m+1}{n}-1$, 則二項式微分的積分具有更簡單的形式：

$$\varphi(p, q)=\int(a+bt)^p t^q dt。$$

預備定理　若 p、q、$p+q$ 中有一個是整數，則積分 $\varphi(p, q)$ 可以有理化。

證明

第一種情形　p 是整數。在這種情形，顯然可將積分 $\varphi(p, q)$ 寫爲：

$$\varphi(p, q)=\int R(t, t^q)dt,$$

所以可按前一節的法則(卽有理化方法)來積分。

第二種情形　q 是整數。在這種情形，$\varphi(p, q)$ 可寫爲：

$$\varphi(p, q)=\int R[(a+bt)^p, t]dt;$$

所以可按前一節的法則來積分。

第三種情形　$p+q$ 是整數。在這種情形，我們有：

$$\varphi(p,q)=\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt=\int R\left[\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p,\ t\right]dt;$$

所以仍可按前一節的法則來積分。

(定理證畢)

由預備定理得:

定理 二項式微分的積分 $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, 假若三數 $\frac{m+1}{n}$, p, $\frac{m+1}{n}+p$ 中有一個是整數,則可以用有理化方法積分出來;就是說,其結果可以用代數函數、對數函數及反三角函數表達出來。

著名的俄國數學家契伯西夫在 1853 年曾證明了:假若上述三數都不是整數,則二項式微分的積分,是不可能用代數函數及初等超越函數表達出來的,也就是說,無論用什麼方法都是不能積出來的。

上述三條件,稱為微分二項式實際積得出來的條件。

例 1. $\int\frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx$。

解 $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$。因 $\frac{m+1}{2}=2$, 是一個整數; 故該題屬於第一種情形。我們設:

$$a+bx^2=z^2,$$

由此
$$x=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}},\quad dx=\frac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}\ \text{及}\ (a+bx^2)^{\frac{3}{2}}=z^3;$$

故
$$\int\frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{z^3}\frac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{b^2}\int(1-az^{-2})dz=$$

$$=\frac{1}{b^2}(z+az^{-1})+C=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C。$$

例 2. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$。

解 $m=-4, n=2, p=-\frac{1}{2}$。$\frac{m+1}{n}+p=-2$ 為一整數; 因此,該題屬於第三種情形。今設

$$1+x^2=z^2x^2,\quad z=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

由此，$x^2=\frac{1}{z^2-1}$，$1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1}$，$\sqrt{1+x^2}=\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$；

故得 $x=\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$，$x^4=\frac{1}{(z^2-1)^2}$ 及 $dx=-\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$。

總之，
$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=z-\frac{z^3}{3}+C=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3}+C。$$

習　題

1. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(3x^2-2)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$。

2. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$。

3. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{x^2-2}{3}+C$。

4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{Cx}{\sqrt{a^2-x^2}+a}$。

5. $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C$。

6. $\int t^3(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}dt=(1+2t^2)^{\frac{5}{2}}\frac{5t^2-1}{70}+C$。

7. $\int u(1+u)^{\frac{3}{2}}du=\frac{2}{35}(1+u)^{\frac{5}{2}}(5u-2)+C$。

8. $\int\frac{dx}{x^2(a+x^3)^{\frac{5}{3}}}=-\frac{3x^3+2a}{2a^2x(a+x^3)^{\frac{2}{3}}}+C$。

§62. 三角函數微分式的變換

定理　關於形式 $\int R(\sin u,\cos u)du$ 的積分，其中 $R(x,y)$ 是字母 x 及 y 的有理函數，可以利用置換 $\tan\frac{u}{2}=z$，亦即用

$$\sin u=\frac{2z}{1+z^2}，\quad \cos u=\frac{1-z^2}{1+z^2}，\quad du=\frac{2dz}{1+z^2}，$$

變為有理形式。

證明 由三角公式 $\tan\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$。取平方，得 $\tan^2\frac{u}{2}=\frac{1-\cos u}{1+\cos u}$。設 $\tan\frac{u}{2}=z$，解 $\cos u$，得：

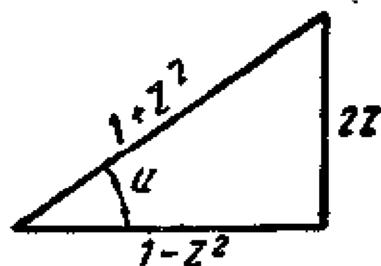


圖 56.

$$\cos u=\frac{1-z^2}{1+z^2}。$$

隨之，以 $1+z^2$ 爲斜邊、以 $1-z^2$ 爲底邊的直角三角形（圖 56）中，該斜邊與底邊的夾角是剛好等於 u 的。又因其第三邊顯然爲 $2z$，故知 $\sin u=\frac{2z}{1+z^2}$。由等式 $\tan\frac{u}{2}=z$，得 $u=2\arctan z$；故 $du=\frac{2dz}{1+z^2}$。

由於 $\sin u$、$\cos u$ 及 du 都是用 z 的有理函數所表達的，故形式爲 $\int R(\sin u, \cos u)du$ 的任何積分都可以有理化[積分中 $R(x, y)$ 爲字母 x, y 的有理函數]。

從這還可知道，假若三角函數的微分式中，除 $\sin u$, $\cos u$ 之外，尙包含 $\tan u$、$\cot u$、$\sec u$、$\csc u$，那末這一點也不礙事，並不影響有理化；因爲 $\tan u$、$\cot u$、$\sec u$、$\csc u$ 都可表達爲 $\sin u$ 及 $\cos u$ 的分式。

例 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\tan\frac{x}{2}+C$。

解 因爲這個微分式是 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理函數，故作上述置換後，立即得到：

$$\int\frac{\left(1+\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=\frac{1}{2}\int(z+2+z^{-1})dz=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}+2z+\ln z\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\tan\frac{x}{2}+C。$$

習 題

1. $\int\frac{dx}{4-5\sin x}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\tan\frac{x}{2}-2}{2\tan\frac{x}{2}-1}\right)+C$。

2. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C$。

3. $\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5\tan x+4}{3}\right)+C$。

4. $\int\frac{dx}{5-4\cos 2x}=\frac{1}{3}\arctan(3\tan x)+C$。

5. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\frac{1}{4}\ln\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{\tan\frac{x}{2}-2}+C$。

6. $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C$。

7. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}=2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\tan\frac{x}{2}+C=x-\tan\frac{x}{2}+C$。

8. 利用本節中方法導出§8中公式(XIV)及(XV)。

§63. 各種置換法

到現在爲止，所討論的置換法，都是把已給的微分式變爲有理形式。可是在許多情形中，我們也可以利用一些置換（雖然它並不把所給的微分式變爲有理形式）來求出積分。我們不可能給出做這些置換的一般法則，這只能憑作習題時所得的經驗和技巧來做。

這裏有一個極有用的置換：

$$x=\frac{1}{z},\quad dx=-\frac{dz}{z^2},$$

稱爲倒量置換。

現在舉一個這種置換的例子。

例　求 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$。

解　作置換：

$$x=\frac{1}{z},\quad dx=-\frac{dz}{z^2}。$$

求得

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\int(a^2z^2-1)^{\frac{1}{2}}z\,dz=-\frac{(a^2z^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C。$$

習　題

1. $\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{a^3+x^3} + C$。　　設 $x^3 = z$。

2. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\, dx = \ln(x-2) - \frac{3x-5}{(x-2)^2} + C$。　　設 $x-2=z$。

3. $\int \frac{x^3\, dx}{(x+1)^4} = \frac{18x^2+27x+11}{6(x+1)^3} + \ln(x+1) + C$。　　設 $x+1=z$，

4. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$。　　設 $x = \frac{a}{z}$。

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{cx}{a+\sqrt{a^2+x^2}}$。　　設 $x = \frac{a}{z}$。

6. $\int \frac{x^3\, dx}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{8}(x^2-3)(x^2+1)^{\frac{1}{3}} + C$。　　設 $x^2+1=z$。

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \ln \frac{cx}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}$。　　設 $x = \frac{1}{z}$。

8. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$。　　設 $1+\ln x = z$。

9. $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^x+1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{\frac{3}{4}} + C$。　　設 $e^x+1=z$。

10. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x} = \frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(e^x-2) + C$。　　設 $e^x = z$。

11. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$。　　設 $x = \cos z$。

12. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$。　　設 $x = a \sin z$。

第六章　級數

§64. 無窮數列

數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，假若在該列中每項之後，恆有更後面的一項，則稱爲無窮數列。例如整數列 $1, 2, \cdots, n, \cdots$，就是這種數列。

給你一個數列，這就意味着，告訴你一種方法，以便於按照號碼 n 來計算它的任意一項 s_n；在這種意義下，下面的數列

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ n^2, \cdots$$

$$2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^n, \cdots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n}, \cdots$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1}, \cdots$$

都算是給好了的。在第一種情形下，s_n 是按公式 $s_n=n^2$ 來決定的；第二種情形下，$s_n=2^n$；第三種情形下，$s_n=\frac{1}{n}$；第四種情形下，$s_n=\frac{n}{n+1}$。

s_n 隨着 n 的變化而變；因此應當說 s_n 是 n 的函數。有時候，當 n 無限增加時，變量 s_n 可能有某數 A 作爲其極限：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A。$$

這時候我們就說，數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 具有極限 A。例如上面第三個數列具有極限零；第四種數列有極限 1。在一般情形中，假若我們在直線上把橫坐標爲 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 的點描下來，那麽這些點最後都包含



圖 57.

在以 A 爲中心的一根任意小的線段中(圖 57)。在這根線段之外只有數列中的有限個點(參閱第一册, §34, 圖 40)。

§65. 數列極限存在的檢驗法

對於所給的數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$, 極其重要的是要會確定它是否具有極限,即使我們不能準確的計算出這個極限。

我們將講一些很容易確定極限是否存在的情形。

第一種情形:假定,當 n 無限增加時,數列的項是一直增大着的,或者更精密些,是不減小的;換言之,我們假定,對於一切 n 恆有:

$$s_{n+1} \geqslant s_n。$$

這時可能有兩種情形:

或者 s_n 隨 n 增加而無限增加,就是說,不論數 N 如何大,數列中的各項,由某個 s_n 開始,都大於 N; 例如整數列 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 就有這種情形;

或者所有的數 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$, 都小於某個固定數 B, 則當 n 無限增加時, s_n 趨近於、小於或等於 B 的極限 A。

讀者不難驗證這件事;假若讀者考察直線上橫坐標各爲數 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 的點, $s_1, s_2, \cdots, s_n \cdots$, 他就可以覺得這命題是足夠正確的。按假定,每一個點都在它前面那個點的右方或與其重合;這意味着,或者點無限的往右方遠離去,或者,如果它們一定得停留在某定點 B 的左邊的話,就會愈來愈堆積於某一點 A 之前,而無限趨近於 A 點,或者與 A 點重合; A 點位於 B 點的左邊或與 B 點重合(圖 58)。



圖 58.

第二種情形：假定，當 n 無限增加時，數列的項 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 是一直減小着的，或者更精密些，是不增大的。這表示了，對於一切 n，我們恆有：

$$s_{n+1} \leqslant s_n。$$

這裏仍然有兩種情形：

或者 s_n 隨 n 增加而無限減小下去（所謂減小指的是代數意義），就是說，不論正數 N 如何大，數列由某個 s_n 開始的一切項，都小於 N；

或者所有的數 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 都大於某個定數 B，則當 n 無限增加時，s_n 趨近於（大於或等於 B 的）極限 A。

在幾何上看來這是很明顯的：在某直線上描出橫坐標爲 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 的點。按假定，每一個點都在它前面那個點的左邊，或與其重合；這意味着，或者這些點無限向左邊遠離去，或者，如果它們一定得留在某定點 B 的右邊的話，就會愈來愈堆積在某定點 A 的後面，無限趨近於該點，或與該點相重合；A 點在 B 點的右邊，或與 B 點重合（圖 59）。



圖 59.

上述兩種數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 稱爲單調數列。隨之，我們有下面的定理：

定理　單調數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，或者趨向於正負號一定的無窮大（即 $+\infty$ 或 $-\infty$）；或者趨近於完全確定了的、唯一的、有限的極限。

就是說，對於單調數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，我們有：

或者 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$，或 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$；或者 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = A$。

上面講的這些事實的完全證明，超出了本書的範圍。

除了單調數列之外，尚有非單調數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，這個名稱是給那種，當 n 無限增加時 s_n 項一會兒增大一會兒減小的數列的。

有時候非單調數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，也有極限，亦卽 $\lim s_n = A$。在這種情形，當指標 n 無限增加時，數列的 s_n 項無限接近於數 A。例如，雖然數列 $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$，一看就是非單調的，但是它具有極限，因爲 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$。但是有時候非單調數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 並不具有極限。例如數列，$-1, +1, -1, +1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ 是非單調的，並且顯然沒有極限。

數列有沒有有限極限的完全檢驗法　下面這個定理，雖然沒有詳盡的說明，但因爲它非常重要，我們還是引在這裏。

欲使數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 具有有限的極限，充分與必要條件是：對於每一個正數 ε，恆可以找到一個數 N（依賴於 ε），使得第 N 項之後的任意兩項之差不大於 ε。

這就是說，當任何的 p 與任何的 q 都大於 N 時，我們應有：

$$|s_p - s_q| < \varepsilon。\quad (圖 60)$$



圖 60.

這個條件，對於有限極限的存在是必要的。因爲，假若 A 是數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 的有限的極限，則：

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = A。$$

而這表示了，對於一切大於某定數 N 的數 n，我們恆有不等式 $|A-s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。特別是：當 $p>N$，$q>N$ 時，我們有 $|A-s_p| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|A-s_p| < \frac{\varepsilon}{2}$。從這兩式中之一減去另一式，來得：$|s_p - s_p| < \varepsilon$；它對於大於 N 的任意數 p 及 q 都成立。

這個條件，對於有限極限的存在是充分的。因爲，當它滿足時，對於定數 $p(p>N)$ 及每一個大於 N 的 n，我們有：$|s_n - s_p| < \varepsilon$。這表示了，在定區間 $\delta = (s_p-\varepsilon, s_p+\varepsilon)$ 之外，只可能有那些指標 n 不超過 N 的點 s_n。這種點至多有 N 個。所以，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 全部點，除了有限個點外，都在一個長爲 2ε（就是說是任意小的）固定區間 δ 之中（圖 61）。這表

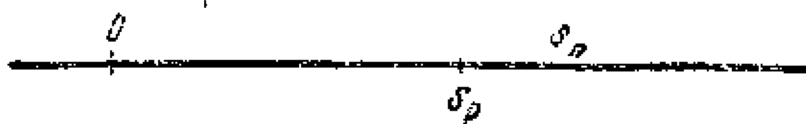


圖 61.

明了，$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 這些點不可能有無窮多個堆積在 $+\infty$ 附近或 $-\infty$ 附近，也不可能有無窮多個堆積在兩個不同的有限點 A，及 $B(A\neq B)$ 的附近。因此，$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 這些點凝聚的地方，只可能是唯一的某點 A，它也就是數列 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ 的極限，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$。

數 項 級 數

§66. 級數

當無窮數列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 給好了時，無窮符號：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

(其中我們把該數列的各項依着原次序寫下來，好像是一個個加上去似的)，稱爲級數；$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，都稱爲級數的項。

我們用 S_n 表示級數的首 n 項的和：

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n。$$

假若當 n 無限增加時，S_n 趨近於一定的、有限的極限 A，則級數就稱爲收斂級數；數 A 稱爲它的和。在這種情形(也只有在這種情形)我們寫下面的條件等式：

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots。\tag{2}$$

假若 S_n 並不具有什麼有限的極限，那麼級數(1)就稱爲發散級數。在這種情形，它不可能具有"和"，一般說來，什麼也不表示❶。

❶ 假若我們利用發散級數來表示什麼，那麼我們甚至可能在計算中犯嚴重錯誤。例如，若級數 $1+2+4+8+16+32+\cdots$ 具有"和" A，則 $A=1+2+4+8+16+32+\cdots$。進一步 $A=1+2(1+2+4+8+16+\cdots)$。這表示 $A=1+2A$。由此 $2A-A=-1$，或 $A=-1$。但是正數之和，不可能等於負數。這個謎局，一語道破，在於：級數 $1+2+4+8+16+\cdots$ 是發散的，它並不表示什麼。

例如我們討論級數：

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots,$$

它的各項組成了幾何進數(公比爲 r)。首 n 項之和是：

$$a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}。$$

設 $|r|<1$。於是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}=0,\quad 故\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right]=\frac{a}{1-r}。$$

所以，當 $|r|<1$ 時，幾何級數是收斂級數，其和等於 $\frac{a}{1-r}$。

反之，級數：

$$1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

是發散的；因爲其首 n 項之和等於 n，就是說，是無限增加着的。

但是，即使首 n 項之和 S_n 不隨 n 而增大，級數也可能是發散的。例如，級數：

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots。$$

在這裏，S_n 或者是 1，或者是零，完全看 n 是奇數還是偶數而定；當 n 無限增加時，S_n 並不趨近於什麼極限。

因爲收斂級數的和是一個完全確定了的數，而發散級數的和又是根本不存在的，那麼隨便在那一個問題中，如果遇到無窮級數，則必須確定它是收斂的，還是發散的。這個問題就是某個數列的極限是否存在的問題，問題變成：我們要確定，當 n 無限增加時，S_n 是否趨近於某個極限。

§67. 收斂的必要條件

對於每一個級數：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

我們有：

$$S_n=u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n,$$

$$S_{n-1}=u_1+\cdots+u_{n-1};$$

因此：
$$u_n=S_n-S_{n-1}。$$

假若級數是收斂的，則 S_n 趨近於一定的極限 A，而 S_{n-1} 也是趨近於同一極限的；因此它們的差 u_n（即級數的第 n 項），當 n 無限增加時，是趨近於零的。

因此，級數收斂的必要條件如下：

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0。$$

換句話說，假若當 n 無限增加時，級數的第 n 項不趨近於零，則該級數是發散的。例如級數

$$1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

就是這樣。

但是這個條件並不是充分的，就是說，雖然級數的第 n 項趨近於零，我們並不能斷定級數是收斂的。事實上，所謂調和級數：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是發散的，雖然也有：

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0。$$

為證明該級數是發散的，我們將它寫爲：

$$1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots,$$

又爲比較起見，我們在它之下寫一個級數：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots。$$

上面一行的每一項，都大於或等於下面一行的相當項；但是下面一行的每個括號中各項的和，都等於 $\frac{1}{2}$；因此，下面這一行的開頭各項的和，可以搞得隨便多大，只要取足夠多的項數就行了；隨之，上面一行

的級數的首 n 項的和，也隨着 n 的無限增加而無限增大，這就是說，級數是發散的。

級數收斂的完全(必要與充分)檢驗法 我們已經證明：假若級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是收斂的，則應有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$。

由此可知，假若級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是收斂的，則應有

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+k})=0。$$

其中 k 是任何定數。因爲，在個別情形下，我們就有：

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=0,\quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+2}=0,\quad \cdots,\quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+k}=0;$$

而固定個數的無窮小的和，仍爲一個無窮小。

現在必須指出下面的命題：當級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 收斂時，等式

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots u_{n+k})=0, \tag{3}$$

不僅對於固定的 k 是正確的，而且對於任意的 k，即使它隨 n 的增加而無限增加，仍然是正確的。

但更重要的是它的逆命題，這就是：假若等式(3)對於一切 k 都能成立，則級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是收斂的。

換句話說：

級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 收斂的必要與充分條件是：對於一切 k，等式(3)恆成立。

證明：要級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ 收斂，必需而且只要數列

$$s_1,\quad s_2,\ \cdots,s_n,\cdots \tag{4}$$

具有有限的極限 A，其中 s_n 表示 $u_1+u_2+\cdots+u_n$，就是說，表示了級數的首 n 項之和。

但是由前一節中的討論，我們知道，數列(4)存在有限極限 A 的充分與必要的條件，是不等式 $|s_q-s_p|<\varepsilon$ 的成立，其中 p 和 q 大於一個只依賴於 ε 的數 N；數 ε 則是任意小的正數，但它是固定的。設 $p=n-1$，$q=n+k$，我們看到：$s_p=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$，$s_q=u_1+$ $+u_2+\cdots u_{n+k}$。由此，前述不等式可寫爲：

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon, \tag{5}$$

只要 $n>N$，而數 k 是任意的。

但這就告訴了我們，欲使數列(4)存在有限的極限，亦即欲使級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是收斂的，必要與充分條件是：對於任意的 k，等式(3)恆成立。(證明完畢)。

同時，我們注意，收斂的必要檢驗法：

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0,$$

是非常容易應用的；而完全檢驗法(3)是非常麻煩的，幾乎不能直接予以應用。

因此，在實際上，總先作必要的檢驗 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$，然後再作一些充分的檢驗。

§68. 收斂的充分檢驗法.級數的比較

一直到現在，我們所討論的都是最一般的級數。現在我們只把注意力放在一種特別情形上，亦即放在正項級數上。尤其是因為，以後我們將看到，許許多多其他的情形都可歸結於這正項級數的情形，所以這種情形格外來得重要。

我們設 $$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$
是一個正項級數；顯然對於一切 n，都有
$$S_{n+1}>S_n;$$
因此，可能有兩種情形：當 n 無限增加時，或者 S_n 也無限增加，於是級數發散；或者對於一切 n，首 n 項之和恆小於某定數 B；在後一種情形級數是收斂的，其和 A 小於或等於 B（參閱§65）。

這些說明，立即使我們想出下面的檢驗正項級數是否收斂的方法。設
$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad (\mathrm{v})$$
是一個正項級數，它收斂與否，是我們已經知道了的。我們把它跟所給的正項級數
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (\mathrm{u})$$
作一比較。

假定，級數(v)是收斂的，並假定，對於所有的 n 的數值，我們都有 $u_n\leqslant v_n$，則級數(u)也是收斂的，因為它的首 n 項之和不大於級數(v)的首 n 項之和，因而，不大於後者的和 B，就是說，級數(u)的和不大於 B。

假定級數(v)是發散的，並假定對於所有的數值 n，我們都有 $u_n\geqslant v_n$，則級數(v)的首 n 項之和可以超過任意的正數；那麼，對於級數(u)就更加是這樣了，這就是說：級數(u)也是發散的。

例 1. 研究級數： $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

解 所給的級數,除第一項之外,每項都小於幾何級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

的對應項,但這個級數是收斂的(§66),因此,所給的級數也是收斂的。

例 2. 研究級數: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

解 這個級數是發散的,因爲其各項大於調和級數的對應項,而後者在§67中已經看出是一個發散的級數。

§69. 達蘭白的收斂檢驗法

取公比爲正數的幾何級數,作爲比較用的級數(v),則我們就得到一個實用上極方便的收斂檢驗法,它是由達蘭白所發見的。

今察看級數的第 $n+1$ 項對第 n 項的比值,就是說察看比值:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

此處所給的級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的所有的項都是正的。

設
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho。$$

我們應當分爲三種情形討論。

1. 假若 $\rho<1$, 則級數是收斂的。事實上,只要 n 足夠大,則比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 將包含在區間 $(\rho-\varepsilon,\ \rho+\varepsilon)$ 之中,其中 ε 是一個很小的數。因此,設 $r=\rho+\varepsilon$, 對於從某個 m 開始之後的所有的 n, 我們都有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r。$$

因此 $u_{m+1}<ru_m$; $u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m$; $u_{m+3}<r^3u_m$; $\cdots$。

隨之,從第 $m+1$ 項開始,我們的級數中每一項都小於下列幾何級數的對應項

$$u_mr+u_mr^2+u_mr^3+\cdots。$$

這個級數是收斂的,因爲 $r<1$ (因 r 與 ρ 相差可以是任意小,而 $\rho<1$

故可選擇 $r<1$)。因此,所給級數也是收斂的❶。

2. 假若 $\rho>1$, 級數是發散的。事實上,只要 n 足夠大時,我們將有:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon。$$

因爲 ε 可以是任意小,這表示 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 亦卽 $u_{n+1}>u_n$; 因而,級數的項是愈來愈大的,就是說,當 n 無限增加時,它不可能趨近於零;所以級數是發散的(圖 62)。

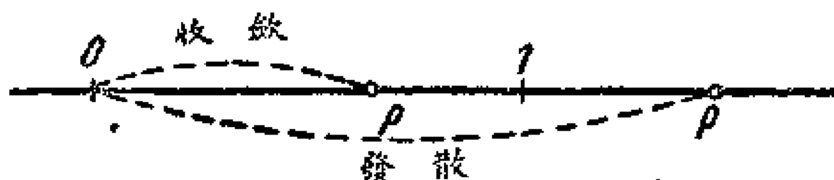


圖 62.

3. 假若 $\rho=1$, 級數可能是收斂的,也可能是發散的。這一點不難從下面的例子中看出來。

今討論當 p 爲各種數值時的級數:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots。$$

比值:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p}{(n+1)^p}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p},$$

---

❶ 在研究級數收斂的問題時,我們可以不管級數開頭的任意多個有限的項。事實上,我們比較兩個級數:

$$u_1+u_2+\cdots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$$

及

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$$

我們將證明,這兩個級數或者同時收斂,或者同時發散。事實上,假若 S_n 是第一個級數的首 n 項之和,而 s_n 是第二級數的首 n 項之和,則

$$S_n=s_{n-m}+S_m。$$

因爲當 n 無限增加時, m 是一個定數,所以,或者 $\lim S_n$ 存在,則 $\lim s_n$ 也存在(反之亦對);或者兩個極限都不存在。

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}=\frac{1}{1^p}=1(=\rho)。$$

隨之，對於一切 p，都有 $\rho=1$。但我們馬上可以看到，當 $p\leqslant1$ 時，級數是發散的；而當 $p>1$ 時，它是收斂的。事實上，假若 $p=1$，所給的級數就是調和級數，其發散性已經證明過了。假若 $p<1$，則所給級數的各項，大於調和級數中的對應項，所以是發散的。

最後，假若 $p>1$，那麼我們有：

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}=\frac{1}{4^{p-1}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}<\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}=\frac{8}{8^p}=\frac{1}{8^{p-1}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3,$$

等等依此類推。級數

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

當 $p>1$ 時，是一個幾何級數。其公比小於 1；因而，它是收斂的。但是由前面的不等式即知，所給級數的開頭各項的和，是小於這個幾何級數的對應和的，因此所給級數是收斂的。

我們已經確實知道，在 $\rho=1$ 的情形下，達蘭白的檢驗法並不能解決級數是否收斂的問題；這裏需要進一步作細密的研究，但是這超出了本書的範圍。

例 1. 試研究下面級數的收斂性：

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdots(n-1)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}+\cdots。$$

解 其第 n 項爲： $$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)};$$

隨之， $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}:\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0。$$

因此，第一種情形，級數是收斂的。其和等於納別爾數 e。

例 2. 研究級數：
$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots。$$

解
$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{10^n},$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{10^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty。$$

故根據第二種情形，即知級數是發散的❶。

例 3. 研究級數：
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots。$$

解
$$u_n=\frac{1}{(2n-1)2n}。$$

因此：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}=1。$$

達朗白的檢驗法失效了。但是級數的收斂性是可以證明的，只要我們注意一下，其各項小於下列級數的對應項：
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$
而這個級數是收斂的(參閱第三種情形的例題，設 $p=2$)。

§70 交錯級數

凡各項正負相交錯的級數，稱爲交錯級數。若設 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，都是正數，則下面的級數就是這種級數：
$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots。\qquad (\mathrm{u})$$

萊博尼茲的檢驗法。

假若
$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant\cdots$$
又
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$
則級數(u)是收斂的，其和 $A\leqslant u_1$。

證明 今討論其首 $2n$ 項之和 S_{2n}；它可以寫爲兩種形式：
$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$
及
$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}。$$

❶ 如果證明了 u_n 隨 n 增加並不趨近於零的，那麼也可以確信該級數是發散的。當達朗白檢驗法已經肯定級數發散時，就有這種情形。

每個括號中的差都是正數(或零)。

因此,從第一列我們看到:S_{2n} 是正數(或等於零),它是隨 n 一同增大(非減小)的,從第二列看到:$S_{2n}\leqslant u_1$。正量 S_{2n} 隨 n 一同增大,但恆小於 u_1;這意味着,它趨近於一定的極限 A,小於或等於 u_1。等式

$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1},$$

中的 u_{2n+1};當 n 無限增加時,是趨近於零的。這告訴我們,S_{2n+1} 也趨近於同一極限 A。所以,所給的級數是收斂的,並以 A 爲其和(圖 63)。

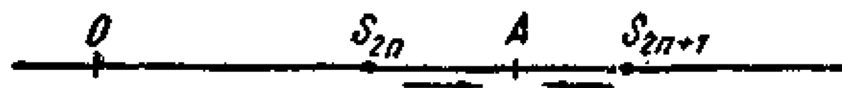


圖 63.

註　假若我們取和 A 等於級數首 n 項之和 $u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n$,我們就弄出一個誤差,其絕對值將小於 u_{n+1};因爲被我們所略去的級數仍然是交錯的,而其首項是 $(-1)^n u_{n+1}$,所以其和的絕對值小於或等於 u_{n+1}。

例　研究交錯級數:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots。$$

解　因爲
$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>\frac{1}{n}>\cdots$$
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

所以級數是收斂的。假若取其和等於:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$
則所作的誤差小於 $\frac{1}{n+1}$。

§71.　絕對收斂

我們任取一級數:
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$
其各項都是實數,可以是正的,也可以是負的。與級數(1)一起,我們同時來考察下列級數
$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots, \tag{2}$$

它是由第一級數的各項的絕對值所組成的。

定理　假若絕對值的級數(2)是收斂的，則所給的級數(1)也應當是收斂的。

證明　絕對值的級數(2)是一個正項級數，按條件它是收斂的。我們用 B 表示它的和。

首先，我們這樣做：在級數(1)中，把所有的正數項保留在原來的位置，把所有的負數項都換爲零。我們得到了一個新的級數，$u_1^*+u_2^*+u_3^*+\cdots+u_n^*+\cdots$ 它已經不再具有負數項而且一定是收斂的，因爲它的各項都不大於收斂級數(2)的相應項。

其次，我們這樣作：在級數(1)中，把所有的負數項保留在原來的位置，把所有的正數項都換爲零。我們得到另一個新的級數，$u_1^{**}+u_2^{**}+\cdots+u_n^{**}+\cdots$。它只是由負數項及零所組成的。這個級數當然也是收斂的，因爲假若把它的所有項的正負號變換一下，則我們就得到了一個沒有負項的級數了，而且這個級數的各項，是不可能超過收斂級數(2)的各對應項的。

現在，所給的級數(1)顯然是所得到的兩個收斂級數的和，因爲對於任意的整數 n，有恆等式：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=(u_1^*+u_2^*+\cdots+u_n^*)+(u_1^{**}+u_2^{**}+\cdots+u_n^{**})。$$

又因爲上面兩個括號中的變量，根據前面的證明，當 $n\to\infty$ 時，具有有限的極限，所以 $\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$ 也是存在的。這就表示了，所給的級數(1)是收斂的。　　(證明完畢)

有了這個定理，就把很大一類級數的收斂性問題，變到正項級數的收斂性問題了。事實上，把級數中各項都換成它的絕對值後，我們就得到了正項級數；假若對於這個級數，應用正項級數的一個收斂性檢驗法，能證明它是收斂的，那末所給的級數也是收斂的。

定義　級數，假若其諸項的絕對值所組成的級數是收斂的，稱爲絕

對收斂。

所證明過的定理，說明了：凡是絕對收斂的級數，都是收斂的。但是，我們不能以爲其逆定理也是成立的，因爲並不是一切收斂級數都是絕對收斂的。

例如，交錯級數：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

按照前面一節所講，是收斂的；但是其絕對值的級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是調和級數，隨之，是發散的。

若級數本身收斂但其各項絕對值所組成的級數發散，那末這種級數稱爲非絕對收斂的級數。

這種級數只是收斂的，但不是絕對收斂的。它們常常稱爲"條件收斂"的級數；而把絕對收斂的級數，稱爲"無條件收斂"的級數。

非絕對收斂的級數，也可能用得着，因爲他們本身是收斂的。但是處理這種級數時，應特別小心，因爲它們具有一些性質，完全不是尋常的和所有的，而且乍看起來，這些性質是有些奇怪的。例如：

在非絕對收斂的級數中，不能顛倒它的諸項，否則可能會改變整個級數的和。

例如，我們取交錯收斂級數：

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

把它的諸項顛倒一下，使得在每一個正數項之後，緊跟着兩個沒有在前面寫過的最近的負數項：

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

顯然，在這樣顛倒時，顛倒後的級數中沒有丟掉原級數中的任何一項，也沒有把一項重複寫幾次，每一項都只寫一次。

不難看到，這個新級數的和，只是原級數和的一半，亦卽 $\frac{A}{2}$。

爲此，我們只要把每一個正項與其緊跟着的一個負項加起來就得了。這就給出：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

或者，括出公共因子 $\frac{1}{2}$ 之後，得：

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{A}{2}。$$

這個事實，初看起來很奇怪。但是，如果我們注意到：在每一個非絕對收斂的級數中，正負的和總等於 $+\infty$，而負項的和總等於 $-\infty$，那末對這事就不會覺得太奇怪了。這樣，適當顚倒級數中諸項之後，不難使得顚倒之後的級數的和，是預先任意選擇定了的數。應當記住，求非絕對收斂級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的和 A，是求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，其中 $S_n=u_1+u_2+\cdots u_n$；就是說，這個極限的求法，總是不定形式 $\infty-\infty$ 的定值法。

至於絕對收斂的級數，就完全沒有這種情形：它的各項可以隨意顚倒，而用不着害怕會改變它的和；也不必怕顚倒之後的級數會不收斂。在這方面絕對收斂級數非常像有限的和，它的各項是可以排成任意次序的。

爲證明這一點，我們先取任一個正項收斂級數：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，並以 A 表示它的和。我們隨便顚倒一下它的各項，並以 $u_1^*+u_2^*+u_3^*+\cdots+u_n^*+\cdots$ 表示所得的新級數。第一，這個級數是收斂的，因爲其首 n 項之和 $S_n^*=u_1^*+u_2^*+\cdots+u_n^*$ 恆小於 A。事實上，當 n 固定時，$u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*$ 諸項，應當出現在和 $S_m=u_1+u_2+\cdots+u_m$ 之中，只要 m 是足夠大就行了；這意味着，我們應有 $S_n^*<S_m<A$（圖 64）。因此，S_n^* 隨着 n 的增加而增大，但恆小於 A。由此而知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*$ 是存在的；我們用 A^* 來記。第二，由上面所講可知，顚倒後的級數和 A^*，不能大於原來的級數和 A，亦即 $A^*\leqslant A$。但是原來的級數本身，也可以認爲是級數 $u_1^*+u_2^*+\cdots+u_n^*+\cdots$ 的顚倒後的級數；所以我們應有反過來的不等式 $A\leqslant A^*$。由此可知，我們有準確的等式：$A=A^*$；這意味着：正項收斂級數的和，不因顚倒其各項的次序而改變。



圖 64

假若現在所給的級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 正負項都有，又是絕對收斂的，則它應當認爲是兩個正項級數的差。按上面的證明，這兩個級數的各項可以任意顛倒，並無損於它們的收斂性，也不會改變它們的和，故由此可知，每一個絕對收斂的級數，都可以隨便顛倒其各項的次序，這樣做，既不有損於其收斂性，也不會改變它的和。(證明完畢)

§72. 歌希的積分檢驗法

對於正項級數：

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

還有一個收斂及發散性的檢驗法，但是需要級數的各項是單調減小到零的，亦即需要

$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant\cdots \quad 及 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n=0。 \tag{2}$$

我們已經知道，級數的一般項 u_n 是其指標 n 的函數：

$$u_n=\varphi(n), \tag{3}$$

這裏，嚴格說起來，字母 n 只取得正整數 1, 2, 3, 4, …。但是在許多情形下，函數 $\varphi(n)$ 給得好像是連續變量 n 的函數，且當級數中的項 u_n 單調地減小至零時，其母函數

$$u=\varphi(n), \tag{4}$$

當自變量連續增加到無窮大時，是一個連續單調減小到零的函數，亦即

$$\varphi(n)\to 0,\ (當\ n\to+\infty\ 時)。$$

就幾何意義而言，方程 $u=\varphi(n)$ 表示了一條連續曲線，由某點 k 開始，在 ON 軸的上方，單調地降落，接近於這根軸，以之爲漸近線(圖 65)。顯然，由 ON 軸、曲線 $u=\varphi(n)$ 及 $n=k$ 處豎立的縱坐標三者所圍成的面積等於定積分：

$$\int_k^{+\infty}\varphi(n)dn。$$

顯然，這塊面積小於突出的各個矩形(底邊爲一，高各爲 u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, …)的面積的總和，又大於各個內接矩形(底邊爲一，高爲 u_{k+1}, u_{k+2}, …)的面積的和。

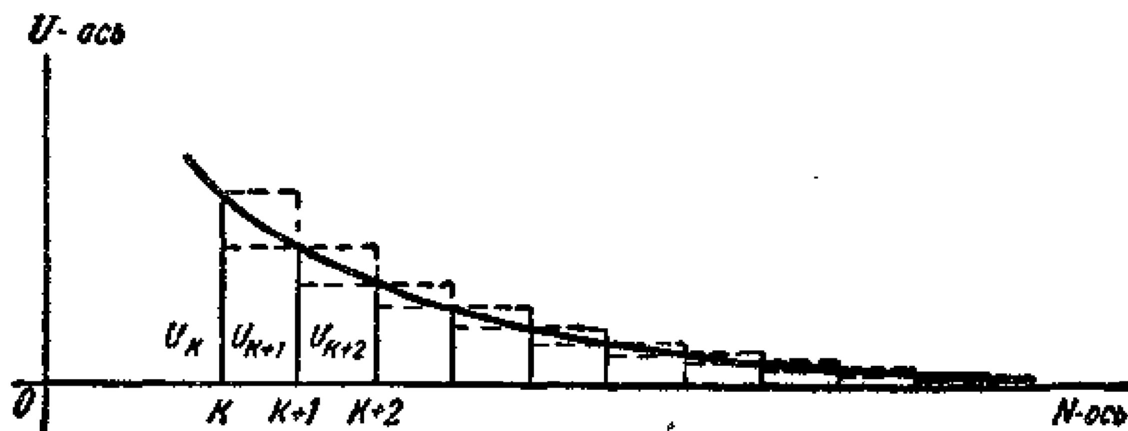


圖 65.

這表示我們有不等式：

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots<\int_k^{+\infty}\varphi(n)dn<u_k+u_{k+1}+\cdots。\tag{5}$$

從這不等式可知：當而且僅當定積分 $\int_k^{+\infty}\varphi(n)dn$ 具有有限的數值時，所討論的級數(1)才是收斂的。

這個檢驗法，稱爲歌希的積分檢驗法。應用它時要遵守下面的法則：

第一步　對於已給的常減正項級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，求一單調常減的連續函數 $\varphi(n)$，使它產生級數的各項，亦即使 $u_n=\varphi(n)$。

第二步　計算定積分 $\int_k^{+\infty}\varphi(n)dn$。假若它等於 $+\infty$，則級數是發散的；假若它具有有限的數值，則級數是收斂的。

歌希的積分檢驗法，使我們能立卽判斷許多很重要的正項級數的收斂與發散性；在這方面說來，它具有極大的價值。

例 1. 試證明調和級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是發散的。

解　我們有 $\int_k^N \frac{dn}{n}=\Big[\ln n\Big]_k^n=\ln N-\ln k=\ln\frac{N}{k}$。

當 $N\to+\infty$ 時，則 $\ln\frac{N}{k}\to+\infty$。故 $\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n}=+\infty$，級數是發散的。

例 2. 研究級數 $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$。

解 我們有 $\int \frac{dn}{n^p}=\int n^{-p}\,dn=\frac{n^{-p+1}}{-p+1}+C$,

故
$$\int_k^N \frac{dn}{n^p}=\frac{1}{1-p}\Big[n^{1-p}\Big]_k^N=\frac{1}{1-p}\Big[N^{1-p}-k^{1-p}\Big]。$$

這裏,我們先假定了指數 p 是一個異於 1 的正數。若 $p<1$, 顯然 $\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n^p}=+\infty$, 級數是發散的。若 $p>1$, 顯然有:

$$\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n^p}=-\frac{1}{1-p}k^{1-p}=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{k^{p-1}}<+\infty,$$

級數是收斂的。

例 3. 研究級數 $\frac{1}{1\ln^p 1}+\frac{1}{2\ln^p 2}+\cdots+\frac{1}{n\ln^p n}+\cdots$。

解 我們算出 $\int\frac{dn}{n\ln^p n}=\int\frac{d\ln n}{\ln^p n}=\frac{\ln^{1-p}n}{1-p}+C$。故 $\int_k^N\frac{dn}{n\ln^p n}=\frac{1}{1-p}\Big[\ln^{1-p}N-\ln^{1-p}k\Big]$。假若 $p>1$, 顯然 $\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n\ln^p n}=\frac{1}{p-1}\ln^{1-p}k<+\infty$, 就是說,級數是收斂的。假若 $p<1$, 顯然 $\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n\ln^p n}=+\infty$, 就是說, 級數是發散的。假若 $p=1$, 則 $\int_k^N\frac{dn}{n\ln n}=\int_k^N\frac{d\ln n}{\ln n}=\Big[\ln\ln n\Big]_k^N$。故當 $N\to+\infty$ 時,我們有: $\int_k^N\frac{dn}{n\ln n}\to+\infty$。因此, $\int_k^{+\infty}\frac{dn}{n\ln n}=+\infty$, 就是說,級數是發散的。

§73. 級數的運算

一個收斂的級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, 當縮寫爲 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 也就是把它的一般項 u_n 寫在完全和符號 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 之後, 並在該符號上指出 n 取到所有的正整數: 1, 2, 3, …。

數級的加法及減法 假若級數 $A=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 與 $B=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收斂的; 則將它們的對應項相加或相減所得的級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也是收斂的; 而且它的和等於 $A\pm B$。

證明 按假定,我們有 $A=\lim_{n\to+\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$ 及 $B=\lim_{n\to+\infty}(v_1+v_2+\cdots+v_n)$。由此相加或相減,即得:

$$A\pm B=\lim_{n\to+\infty}[(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm u_n)]。$$

這表示了級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 是收斂的，其和等於 $A\pm B$。

級數的乘法 假若級數 $A=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 與 $B=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是絕對收斂的，則完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 也是絕對收斂的，其和即等於 AB；這裏，級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 是由第一級數的各項與第二級數的各項一對對相乘而得的所有乘積，按着任意次序排列而成的。

證明 我們用 $\sum_N u_p v_q$ 表示完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 中首 N 項的和；又用 k 表示 $\sum_N u_p v_q$ 中的指標 p 及 q 的最大數。顯然，我們有：

$$\sum_N|u_p v_q|<\sum_{p=1}^{k}|u_p|\cdot\sum_{q=1}^{k}|v_q|。$$

更進一步，我們將有不等式：

$$\sum_N|u_p v_q|<\sum_{p=1}^{\infty}|u_p|\cdot\sum_{q=1}^{\infty}|v_q|。$$

這個不等式指出了，完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 是絕對收斂的。

完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 之和等於乘積 AB 是不難證明的。實際上，由於按上面的證明，該級數是絕對收斂的，所以它的各項可以任意排列。我們用 B_n 表示第一個級數的首 n 項之和，$A_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，又用 B_n 表示第二個級數的首 n 項之和，$B_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$。現在把完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty}u_p v_q$ 的各項排列如下：首先取乘積 A_1B_1 中的唯一項，然後補足乘積 A_2B_2 中尚未寫出的 3 項，其後再補足乘積 A_3B_3 中尚未寫出的 5 項，這樣一直下去。一般說來，若已寫出了乘積 A_nB_n 的各項，我們就再補上乘積 $A_{n+1}B_{n+1}$ 中還沒有寫出的各項等等。這樣，當我們寫

出了完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty} u_p v_q$ 時，顯然，其和爲乘積 $A_n B_n$ 的極限，亦卽等於 AB。（證明完畢）

從上面的證明還可以知道：處理絕對收斂級數 $u_1+u_2+\cdots+u_p+\cdots$ 及 $v_1+v_2+\cdots+v_q+\cdots$ 的情形，可以像處理尋常有限和一樣，這意思就是，可以把它們的各項相乘，並把兩項兩項相乘而得的乘積依任何次序排列，只要在這樣做時，不糊糊塗塗，不漏掉任何一個乘積 $u_p v_q$，也不把它重寫幾次。

爲了避免這種錯誤，尋常都把完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty} u_p v_q$ 的各項排列如下：我們把兩項兩項相乘而得的乘積 $u_p v_q$ 的指標 p 與 q 之和，稱爲該乘積的"權重"。這樣，完全級數中，"權重"爲 $n+1$ 的所有各項爲：

$$u_1 v_n,\ u_2 v_{n-1},\ u_3 v_{n-2},\cdots,\ u_n v_1。$$

因此，若以 w_{n+1} 表示它們的和：

$$w_{n+1}=u_1 v_n+u_2 v_{n-1}+u_3 v_{n-2}+\cdots+u_n v_1, \tag{6}$$

則完全級數 $\sum_{p,q=1}^{\infty} u_p v_q$ 可寫得極簡單：

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} u_p v_q = w_2+w_3+w_4+\cdots+w_n+\cdots。$$

因此，我們得到下述定理：

假若兩個級數 $A=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 及 $B=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$ 都是絕對收斂的，則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_1 v_n+u_2 v_{n-1}+\cdots+u_n v_1)$$

也是絕對收斂的，其和則等於乘積 AB。

註 對於非絕對收斂而只是收斂的級數而言，這定理並不成立，因爲當兩個級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收斂但非絕對收斂時，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_1 v_n+u_2 v_{n-1}+\cdots+u_n v_1)$ 可能是發散的。例如兩個正負項交錯的收斂級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 的乘積，給出了發散級數 $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$；

因爲按等式(6)所決定的 w_n，當 $n\to+\infty$ 時不可能趨近於零。

§74. 級數的尾巴

我們取任意一個收斂級數：

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

假若我們去掉其首 n 項，則得到一個新的收斂級數 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$。我們用 R_n 表示它的和，並稱之爲所給的級數(1)的尾巴：

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots。 \tag{2}$$

因爲級數(1)的首 n 項之和是用 S_n 記的：

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n, \tag{3}$$

故對於一切 n，我們都有等式：

$$A=S_n+R_n。 \tag{4}$$

又因爲我們已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=A$，故從等式(4)知：

$$\lim_{n\to+\infty}R_n=0。$$

這可以述敍爲：

任何收斂級數的尾巴，當其指標 n 趨向無窮大時，趨近於零。

尾巴 R_n 愈小(絕對值)，則若取級數首 n 項之和作爲級數之和 A 的話，所得的和也就愈準確，亦即所得的近似值愈好。

發散級數既沒有和，也沒有尾巴。

§75. 總結

以上關於數項級數所講的一切，可總結如下：

I. 當給了你一個數項級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 時，首先應當看一看：當指標 n 無限增加時，其一般項 u_n 是否趨近於零。假若我們得不到 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$，則級數是發散的，不必再研究它了。

II. 假若我們有 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$，則應當看一看，它是不是一個正負項

交錯的級數，其各項的絕對值是否一直減小到零。假若所給級數適合這些條件，那末它是收斂的，對每個 n 來說它的和介於 S_n 及 S_{n+1} 之間。

III. 假若所給級數不是正負項交錯的，而且其各項也是非單調常減的，那麼應當看一看它是否絕對收斂；為此應求極限

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho$。假若 $\rho<1$，級數是收斂的；假若 $\rho>1$，級數是發散的；假若 $\rho=1$，則不能斷定，因為它可能是收斂的，也可能是發散的。

IV. 當 $\rho=1$，又 $|u_n|$ 單調常減至零時，應當應用歌希的積分檢驗法試一試。為此，須取一產生該級數中各項的單調函數 $\varphi(n)$ 使 $|u_n|=\varphi(n)$，並計算定積分 $\int_n^{+\infty}\varphi(n)dn$。假若它等於有限數，則所給的級數是絕對收斂的；假若積分等於 $+\infty$，而級數中各項的正負號又是相同的，則級數是發散的；假若它正負項都有，則它還可能是收斂的，但已經不是絕對收斂的了。

習 題

用達蘭白檢驗法證明下列各級數都是收斂的：

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$。

2. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}+\cdots$。

3. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\cdots$。

4. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$。

5. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{1\cdot5\cdot9\cdot13}+\cdots$。

6. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{1\cdot2\cdots7}+\cdots$。

利用比較法，證明下列級數是收斂的；又證明對於頭兩個級數用達蘭白方法失效。

7. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$。

提示 比較 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$。

8. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$。

提示 $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}$。

9. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots$。

提示 $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$

證明下列級數都是發散的：

10. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$。

提示 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)$。

11. $\frac{1\cdot2}{10}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{10^3}+\cdots$。

提示 用達蘭白檢驗法。

12. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\cdots$。

提示 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{1+2n+n^2}=\frac{1}{1+n}$。

13. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots$。

14. $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\cdots$。

提示 $u_n=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}$。

試說明，下列各級數，那些是絕對收斂的，那些不是絕對收斂的。

15. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots$。

絕對收斂，因為 $|u_n|=\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n^2}$。

16. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$。

17. $\frac{1}{\ln2}-\frac{1}{\ln3}+\frac{1}{\ln4}-\cdots$。

18. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots$。

19. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin2\alpha}{4}+\frac{\sin3\alpha}{9}+\cdots$。

絕對收斂，因為 $|u_n|=\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$。

20. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$。

21. $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots$。

提示　參閱習題9。

函數項級數

§76. 函數項級數

到現在爲止，我們研究了數項級數，$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，也就是，研究了各項都是數的級數。現在我們開始研究級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\tag{1}$$

其各項都是自變量 x 的函數。

當 x 得到一定的數值時，函數項級數(1)就變爲數項級數了，因此，對於它，可引用前面所講關於數項級數的一切理論。

假若在某個數值 x_0 處，函數項級數(1)是發散的，那就應該把 x_0 這種數值放棄；因爲發散級數根本沒有什麼用處。因此，若有函數項級數(1)，則只應保全那些使級數(1)收斂的 x 值。使級數(1)收斂的所有 x 值的全體，稱爲該函數項級數的收斂區域。

假若 x 是在收斂區域上的，則級數是收斂的，並具有完全確定的和；這個和顯然是依賴於 x 的，因此，是自變量 x 的函數。我們用 $f(x)$ 記這個和，乃有等式：

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots。\tag{2}$$

這個等式只在函數項級數(1)的收斂區域上才成立。在這區域之外，等式(2)並不成立，因爲這時即使函數 $f(x)$ 是有意義的，但級數是發散的。在收斂區域上，等式(2)是合法的，並稱爲函數 $f(x)$ 展成函數項 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 的級數展開式。

例　幾何級數 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 在區間$(-1,+1)$上是收斂的，在該區間外任何點處是發散的，故這時收斂區域是區間$(-1,+1)$。在該區間上級數之和等於函數$\frac{1}{1-x}$；故在區間$(-1,+1)$上，我們可以寫：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots。$$

在區間$(-1,+1)$外，函數$\frac{1}{1-x}$依然存在，但級數並不存在，因爲它是發散的。甚至在區間$(-1,+1)$的兩個界點$x=+1$，$x=-1$處，級數也是發散的。因此線段$[-1,+1]$並不是收斂區域，而收斂區域只是區間$(-1,+1)$。在該區間內，函數$\frac{1}{1-x}$可展開爲$1, x, x^2, x^3\cdots$的冪級數。

§77. 均勻收斂

我們來考察任一個函數項級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

我們假定它在某個線段$[a, b]$上的每一點x處是收斂的。級數(1)也可以在該線段之外某些地方是收斂的，不過現在我們並不管這些點罷了。

由於級數(1)在線段$[a, b]$的每一點x都是收斂的，故知：它在x點具有一定的和$f(x)$：

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots。\tag{2}$$

假若我們用$S_n(x)$表示這個級數的首n項的和，用$R_n(x)$表示它的尾巴，則有：

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$
$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\cdots;$$

同時，恆有：

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x)。\tag{3}$$

因爲我們假定了級數(1)在線段$[a, b]$的每一點x都是收斂的，所以，當n無限增加時，尾巴$R_n(x)$應趨近於零，也就是，我們有：

$$\lim_{n=+\infty} R_n(x)=0。\tag{4}$$

這表示了各個尾巴的絕對值所成的數列

$$|R_1(x)|, |R_2(x)|, \cdots, |R_n(x)|, \cdots \tag{5}$$

有這麼一個性質：對於每個預先給好的正數 ε，總有這樣一個界 N（依賴於 ε），從這個界起，數列（5）中的所有的項都小於 ε，也就是，只要尾巴的指標 $n \geqslant N$ 時，即有

$$|R_n(x)| < \varepsilon。 \qquad (6)$$

這裏，我們應當非常謹慎並且留意，雖然在線段 $[a, b]$ 的每一點處，不等式（6）都成立，但是這裏先假定 x 點是固定的，就是說 x 點是先選擇好了再研究的；同時上面所講的那個界 N 是關於這一點，也只是關於這一點的。假若我們變化 x 點，從線段 $[a, b]$ 上一會兒取這一點一會兒又取另一點，那麼，一般說來，N 也將改變了，因為 N 是依賴於 x 的。對於 $[a, b]$ 中某一些點 x，不等式（6）可以早一些成立，而對於另一些點，該不等式可能遲一些才成立，因此一般說來，這裏並沒有任何樣的一致性（均勻性）。所以我們應當用 N_x 表示點 x 的 N，因為 N 是依賴於 x 的。

這是收斂的函數項級數的一般情形。但是在一些特別的情形中，N_x 並不依賴於 $[a, b]$ 上 x 點的位置。在這些情形時，我們就可以單單用 N 表示上面所講的那個界 N_x，而不必在下面標出 x 來了；因為在這些情形下，由於尾巴 $R_n(x)$ 對於該線段上所有的點 x，是以同一速度趨近於零的，所以不必多此一舉。這種函數項級數（1）稱為均勻（一致）收斂的級數。

這樣，我們就有下面的定義：

定義 在線段 $[a, b]$ 上到處收斂的函數項級數

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

假若對於該線段上所有的點，只要當尾巴的指標 n 超過 N（依賴於 ε）$n \geqslant N$ 時，不等式 $|R_n(x)| < \varepsilon$ 立即成立的話，就稱為在線段上均勻收斂的級數。

均勻收斂級數的例子：幾何級數

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

在線段$[-a,+a]$上是均勻收斂的，這裏 a 是小於 1 的一個正數。

證明　級數 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 在區間$(-1,+1)$上是收斂的，其和爲 $\frac{1}{1-x}$；在該區間之外，它是發散的。我們有

$$S_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1},$$

及 $R_n(x)=x^n+x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots=x^n(1+x+x^2+\cdots)=\frac{x^n}{1-x}$。因爲 $\frac{x^n}{1-x}$ 是隨 x 增到 1 而增加的，故對於線段$[-a,+a]$上所有的點 x，(這裏 $0<a<1$) 我們有不等式：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|\leqslant\frac{a^n}{1-a}。$$

但當 n 無限增加時，由於 $a<1$，故 $a^n\to0$；因此，對於每一個 ε，都有一個 N，使得 $n\geqslant N$ 時 $\frac{a^n}{1-a}<\varepsilon$。所以，當 $n>N$ 時，對於線段$[-a,+a]$上所有的點 x，都是不等式

$$|R_n(x)|<\varepsilon。$$

這就是均勻收斂性。

非均勻收斂的級數的例子　我們取函數項級數：$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$，其中函數 $y=u_n(x)$ 如圖 66 所示。這裏我們看到，這函數是由一等腰三角形的兩腰所表示的，這等腰三角形的底邊爲線段 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 高爲一。在線段$\left[0,\frac{1}{n}\right]$之外，$u_n(x)=0$。顯然，$u_n(x)$是一個非負的函數，到處都是連續的。此外，在基本線段$[0,1]$上，級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+$ $+\cdots$ 到處都是收斂的，因爲在原點 $x=0$ 處，級數的各項等於零；而在原點之外，亦即對於一定的正的 x，恆有這種數 N，使得當 $n>N$ 時，x 就在線段$\left[0,\frac{1}{n}\right]$之外了，所以，就有 $0=u_n(x)=$ $=u_{n+1}(x)=u_{n+2}(x)=\cdots$。因此，當 x 是基本線段$[0,1]$上任一點時，級數是絕對收斂的。但是它不是均勻收斂的；因爲每一個尾巴 $u_n(x)+$ $+u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$ 都具有使它自己大於 1 的點，例如在 $x=\frac{1}{2n}$ 點處，在這裏，$u_n(x)=1$，同時尾巴中的其他各項又都不是負數，

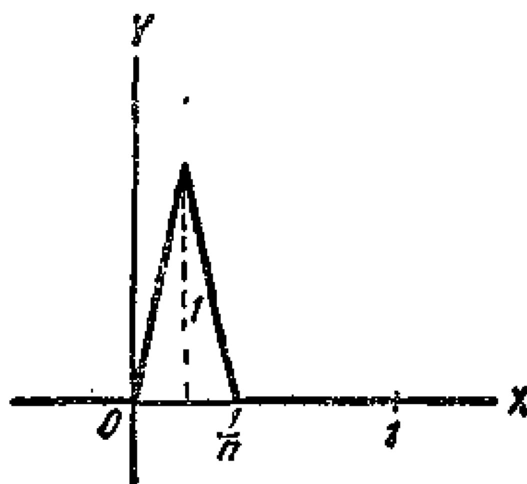


圖　66.

§78.　均勻收斂的檢驗法

由於均勻收斂性極爲重要，我們必須給出判斷所給函數項級數是否爲均勻收斂的檢驗法。

定理 假若函數項級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$，的一切項在線段 $[a, b]$ 上的絕對值都小於某個收斂正項級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+$ $+\cdots$ 的對應項，則函數項級數在該線段上是均勻收斂的。

證明 設正項級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是收斂的，並設在線段 $[a, b]$ 上，對於每一個 n 以及在該線段上的所有點 x 處都成立下面的不等式：

$$|u_n(x)| \leqslant a_n。 \tag{1}$$

由不等式(1)首先可知，函數項級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{2}$$

在線段 $[a, b]$ 的一切點 x 處是絕對收斂的。

我們用 r_n 表示收斂正項級數

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{3}$$

的尾巴 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$，我們看到 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$。由此，對於所給的 ε，恆有這種 N，使得 $n>N$ 時，卽有

$$r_n<\varepsilon。$$

又因為，當 $n>N$ 時，我們顯然有：

$$|R_n(x)|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots| \leqslant$$
$$\leqslant |u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots<\varepsilon,$$

所以在整個線段 $[a, b]$ 上，對於每一個大於 N 的 n，都有

$$|R_n(x)|<\varepsilon。$$

這就是函數項級數(2)在線段 $[a, b]$ 上的均勻收斂性。

(證明完畢)

為了把均勻收斂的這個檢驗法敍述起來方便起見，通常用下面這個術語。

函數項級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$，將稱為線段 $[a, b]$ 上的**正規收斂級數**，假若其各項的絕對值小於收斂正項級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 的對應項的話。後面這個級數，稱為所給函數項級數的**高界級數**。

用這術語我們可以說：

每一個在線段$[a, b]$上正規收斂的函數項級數，在該線段上是均勻收斂的。

所求得的均勻收斂性的檢驗法，只是充分的，並不是必要的。

§79. 均勻收斂級數的性質

性質 I. 連續函數項級數$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$，若在線段$[a, b]$上是均勻收斂的，則其和$f(x)$是一個連續函數。

證明 設每一個函數$u_n(x)$在線段$[a, b]$上都是連續的，又在該線段上，級數$u_1(x)+u_2(x)+\cdots$是均勻收斂的。這就是說，對於ε，恆有這種n，使得在線段$[a, b]$上，不等式$|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$到處都成立。另一方面，當$n$給定後，和$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，顯然是在$[a, b]$上連續的函數。因此，只要$|x''-x'|<\eta$，就可以有不等式：$|S_n(x'')-S_n(x')|<\frac{\varepsilon}{4}$。因爲$f(x)=S_n(x)+R_n(x)$故有：

$$f(x')=S_n(x')+R_n(x'),$$
$$f(x'')=S_n(x'')+R_n(x'')。$$

把這兩個等式相減，得：

$$f(x'')-f(x')=S_n(x'')-S_n(x')+R_n(x'')-R_n(x')。$$

由此得

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant|S_n(x'')-S_n(x')|+|R_n(x'')|+$$
$$+|R_n(x')|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,\text{ 只要 } |x''-x'|<\eta。$$

這就證明了和$f(x)$的連續性。 (證明完畢)

註 假若連續函數項級數是收斂的，但非均勻收斂的，則其和可能是一個不連續的函數。在 §77 第二個例子中所講的正連續函數項級數$u_1(x)+u_2(x)+\cdots$，在線段$[0,1]$上是處處收斂的，但它的和是不連續函數$f(x)$，因爲我們有$f(0)=0$，而對於每一自然數n，又有

$f\left(\frac{1}{2n}\right)>1$。

函數項級數均勻收斂的幾何表示法。

圖 67 用虛線表示了曲線 $y=f(x)$。若把它先向上移動 ε，然後又向下移動 ε，則得到一個彎曲寬帶：上面以曲線 $y=f(x)+\varepsilon$ 為界，下邊以曲線 $y=f(x)-\varepsilon$ 為界。因為對於 ε，恆有一個依賴於 ε 的 N，從 N 開始，當 $n\geqslant N$ 時，即有 $|R_n(x)|<\varepsilon$，而這表示了，我們有不等式：

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon, \tag{1}$$

對於 $[a,b]$ 中所有的點，只要 $n\geqslant N$ 時，它就成立。從幾何意義來說，在取極限以前，只要 $n\geqslant N$，曲線 $y=S_n(x)$ 上的全部點都是在上述寬帶之內的。因此可把曲線 $y=S_n(x)$ 看作是其極限曲線 $y=f(x)$ 的近似曲線。ε 愈小，則近似曲線愈好，這就是說，誤差愈小。

不等式(1)與上册第五章中我們用來定義變量極限的那個不等式，非常相似。不過在那裏極限只是數，而這裏極限是函數 $f(x)$。在那裏，趨近於極限的是變量；而這裏是在極限前變化着的函數 $S_n(x)$。那裏是用動點表示變量的，隨着時間推移，動點跑到包圍極限的一個區間裏去，而且此後再不出來了。這裏，在極限前變化着的函數 $S_n(x)$，是用一條動曲線 $y=S_n(x)$ 表示的，隨着時間推移，動曲線整個移到那包圍固定極限曲線 $y=f(x)$ 的上述寬帶之內，並且從此它就留在裏面了。

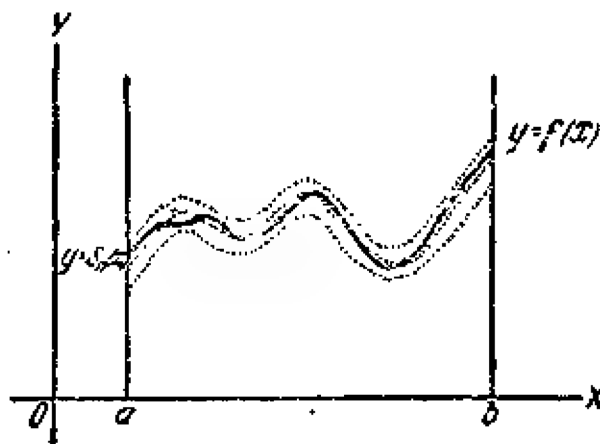


圖 67.

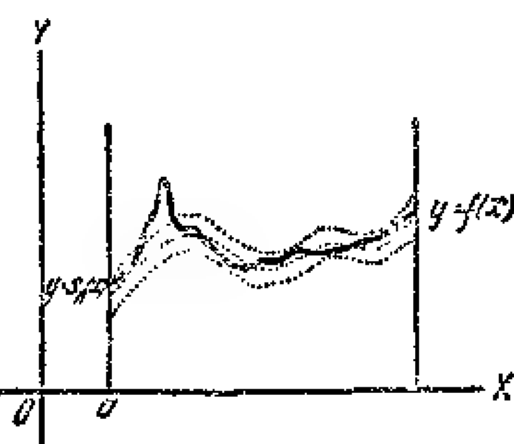


圖 68.

假若級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 是收斂的，而不是均勻收斂的，並且以函數 $f(x)$ 為它的和，則當我們給出曲線 $y=f(x)$ 及在其兩旁寬為 2ε 的寬帶時，近似曲線 $y=S_n(x)$ 不可能從某一瞬時起，整個移到該寬帶之內(當 ε 足夠小時)，而總有對應於無限多個 n 的無窮多根近似曲線，部分地超出該寬帶，形成突出在該寬帶外的波峯(圖 68)。當 n 無限制增加時，這個波峯不能完全除去，只不過向右或向左移動；因為對於 $[a,b]$ 上每一個固定的點 x，尾巴 $R_n(x)$ 一定要趨於零 $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$。因此，當 n 足夠大時，我們一定有 $|f(x_0)-S_n(x_0)|<\varepsilon$。但是

這並不表示波峯是消失了，而只不過從橫坐標 x 處移至別處罷了。這樣，非均勻收斂性乃是"移動的波的現象"。

性質 II. 連續函數項的均勻收斂級數，可以逐項積分。

證明 假若級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 是由連續函數項所組成的，在線段 $[a, b]$ 上是均勻收斂的，則其和 $f(x)$，如我們所證明了的，是該線段上的一個連續函數。我們有：$f(x)=S_n(x)+R_n(x)$，其中 $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，而 $R_n(x)$ 是尾巴。這個尾巴是連續函數，因為它是兩個連續函數 $f(x)$ 及 $S_n(x)$ 的差。將前面的等式積分，以 t 表示積分變量，得：

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x S_n(t)dt+\int_a^x R_n(t)dt。$$

由於原來的級數有均勻收斂性，當 n 大於某個 N 時，對於線段 $[a, b]$ 上所有的點 t，均有：$|R_n(t)|<\varepsilon$。隨之，$n>N$ 時有：

$$\left|\int_a^x R_n(t)dt\right|\leqslant\int_a^x|R_n(t)|dt<\varepsilon\int_a^x dt<\varepsilon(b-a)。\qquad (2)$$

因為 ε 是任意小的數，故當 N 足夠大時，對於線段 $[a, b]$ 的任意 x，有：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^x R_n(t)dt=0。\qquad (3)$$

因此，我們有：

$$\int_a^x f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^x S_n(t)dt,\qquad (4)$$

又因為

$$\int_a^x S_n(t)dt=\int_a^x u_1(t)dt+\int_a^x u_2(t)dt+\cdots+\int_a^x u_n(t)dt,\qquad (5)$$

故由等式(4)可知，級數

$$\int_a^x u_1(t)dt+\int_a^x u_2(t)dt+\cdots+\int_a^x u_n(t)dt+\cdots\qquad (6)$$

是收斂的，其和等於積分 $\int_a^x f(t)dt$。

因爲級數（6）的尾巴是 $\int_a^x u_{n+1}(t)dt+\int_a^x u_{n+2}(t)dt+\cdots$、根據所證明的，也就是 $\int_a^x R_n(t)dt$，故根據不等式（2），可知級數（6）是在 $[a, b]$ 上均勻收斂的。

因此，我們得到定理：

假若連續函數項級數：

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

是在線段 $[a, b]$ 上均勻收斂的，則可逐項積分，亦即可以寫：

$$\int_a^x f dx=\int_a^x u_1 dx+\int_a^x u_2 dx+\cdots+\int_a^x u_n dx+\cdots,$$

同時，逐項積分後的級數，在線段 $[a, b]$ 上，一定也是均勻收斂的。

特別設 $x=b$ 時，我們有：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)dx+\cdots。\quad (7)$$

（證明完畢）

註 假若函數項級數 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 在線段 $[a, b]$ 上是非均勻收斂的，那末即使它的各項 $u_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的連續函數，甚至即使它的和 $f(x)$ 也是連續函數，但一般說來，它仍是不能逐項積分的。因爲級數亦可能是發散的；或者即使它是收斂的，它的和也不一定等於積分 $\int_a^b f(x)dx$。

性質 III. 假若收斂級數 $f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 的所有項在 $[a, b]$ 上具有連續導數 $u_1'(x), u_2'(x), \cdots$，又若由這些導數項所組成的級數 $u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$，在 $[a, b]$ 上是均勻收斂的，則所給的級數可以逐項微分，亦即我們可以寫：

$$f'(x)=u_1'(u)+u_2'(x)+u_3'(x)\cdots。$$

證明 這個定理可歸結到前述定理。實際上，若用 $\varphi(x)$ 表示連續函數項均勻收斂級數 $u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$ 的和：$\varphi(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+$ $+\cdots$，按前面的證明，我們可以把它逐項積分，並寫：

$$\int_a^x \varphi(t)dt=\int_a^x u_1'(t)dt+\int_a^x u_2'(t)dt+\cdots+\int_a^x u_n'(t)dt+\cdots。\qquad (8)$$

另一方面，我們有 $\int_a^x u_n'(t)dt=u_n(x)-u_n(a)$。因此，收斂級數(8)可以改寫爲下面的形式：

$$\int_a^x \varphi(t)dt=[u_1(x)-u_1(a)]+[u_2(x)-u_2(a)]+\cdots+$$

$$+[u_n(x)-u_n(a)]+\cdots。\qquad (9)$$

按條件，級數 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 都是收斂的，其和各等於 $f(x)$ 及 $f(a)$。因此公式(9)可改寫爲 $\int_a^x \varphi(t)dt=f(x)-f(a)$。由此顯然而知，函數 $\varphi(x)$ 是函數 $f(x)$ 的導數，亦即 $f'(x)=\varphi(x)$。因爲上面我們用 $\varphi(x)$ 表示均勻收斂級數 $u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$ 的和，故由此而知：$f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$。　　(證明完畢)

註　假若所給的函數項級數 $f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 是收斂的，並且其各項均可微分，但是假若其導數項級數 $u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$ 是非均勻收斂的，則一般說來，所給的級數是不能逐項微分的，因爲其和 $f(x)$ 可能是不可微分的，或者，卽使它具有導數 $f'(x)$，這個導數也可能不等於級數 $u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots$ 的和。

§80. 冪級數的收斂區域．冪級數

所謂冪級數，乃下面形式的級數：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\qquad (1)$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 均爲常數，它們稱爲冪級數的係數。

收斂區域　關於冪級數，首先應當知道的，是如何決定它的收斂區域。

阿培爾定理　假若在某個非零的點 $x_0\neq 0$ 處，冪級數是收斂的，則在區間 $(-|x_0|, +|x_0|)$ 內的每一根線段上，該冪級數是正規收斂的。

證明　設冪級數(1)在某個異於坐標原點 O 的點 x_0 處是收斂

的❶。在 OX 軸上以原點 O 爲中心取一個區間 $(-|x_0|, +|x_0|)$，並考察該區間內的任一線段 $[a, b]$（圖 69）。假若 x 是線段 $[a, b]$ 的任意一點，顯然絕對值 $|x|$ 不能等於絕對值 $|x_0|$，而總是小於 $|x_0|-\varepsilon$ 的，這裏 ε 是某個正數，就是說我們有 $|x|<|x_0|-\varepsilon$。由此可知，$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1-\frac{\varepsilon}{|x_0|}=\theta$，其中 θ 是一個確定的、小於一的正數，$0<\theta<1$。

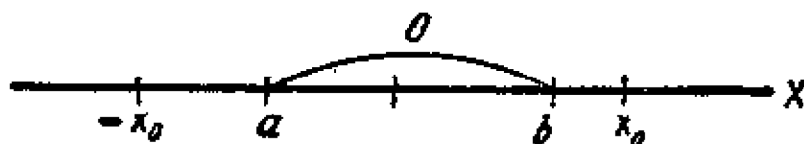


圖 69.

我們假定，冪級數（1）在 x_0 點處是收斂的。因此，級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 的一般項，當 $n\to+\infty$ 時，趨近於零；故當 $n>N$ 時，我們有：$|a_nx_0^n|<\eta$。這裏 η 是一個小於一的、任意小的正數㊀。

假若 x 是線段 $[a, b]$ 的任意一點，則我們有不等式：

$$\left|a_nx^n\right|=\left|a_nx_0^n\frac{x^n}{x_0^n}\right|=\left|a_nx_0^n\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<\eta\cdot\theta^n<\theta^n,\ \text{此中}\ n>N。$$

由此而知：在線段 $[a, b]$ 上，冪級數 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$（當 $n>N$ 時）各項的絕對值，各小於幾何級數 $1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^n+\cdots$ 的對應項，這裏 θ 是正的固定的數。這表示了，冪級數在線段 $[a, b]$ 上是正規收斂的，因爲幾何級數 $1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^n+\cdots$ 做了它的高界級數。

（證明完畢）

阿培爾定理給出了冪級數的收斂區域的清晰觀念。我們把冪級數(1)的每一個發散點（在想像中）染爲紅色，又把每一個收斂點染爲藍色。顯然，$x=0$ 這點是藍色的。假定冪級數在各處都是收斂的，則整

❶ 在圖 69 中 x_0 在原點 O 的右邊，亦即我們取 x_0 爲正數值。當 x_0 是負數而只要 $x_0\neq 0$ 時，所有論證都是一樣的。

㊀ 譯者註："小於一的"這修飾詞是譯者加的。

個橫軸 $X'X$ 是藍色的。若冪級數在各處都是發散的，則除原點 O 外，整個橫軸都是紅色的。假若有某一(異於零的)點 x_0 是藍色的，則由於亞培爾定理，橫軸上原點兩邊所有比 x_0 更近於原點 O 的這些點，都是藍色的；假若某一點 x_1 是紅色的，則由於亞培爾定理，凡原點 O 兩邊比 x_0 離開 O 點更遠一些的點，都是紅色的。

因爲橫軸上的點不是紅的就是藍的，故由上述種種可知，由原點 O 沿橫軸向右走，最初只遇到藍色的點，然後就只遇到紅色的點了；又，紅藍兩部分的界點 ξ，可能是紅的，也可能是藍的。由原點往左走，也是這樣的；而且，顏色不同的兩部分間的界點 ξ 及 ξ'，各在原點 O 的一邊，它們到原點的距離 ρ 是一樣的。

上面講的區間 $(-\rho,\ +\rho)$ 稱爲所給冪級數(1)的收斂區間，因爲在該區間內，級數是收斂的，而在其外，則是發散的。至於在界點 $\xi'=-\rho$，$\xi=+\rho$ 處，那完全看情形而論，可能是收斂的，也可能是發散的了(圖 70)。



圖 70.

冪級數的收斂區間的長度的實際確定法。

預備定理　假若對於冪級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 我們有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L$，則 $\rho=\dfrac{1}{L}$。

證明　對於級數 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots$，施用達蘭白檢驗法。爲此，作比值 $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|$，當 $n\to+\infty$ 時，求它的極限。我們有：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x|=L\cdot|x|。\qquad(2)$$

由此顯然，當 $|x|<\frac{1}{L}$ 時，該極限嚴格地小於一；因此，級數是收斂的。但當 $|x|>\frac{1}{L}$ 時，該極限是嚴格地大於一的；因此，由某瞬時起，將有不等式 $|a_kx^k|<|a_{k+1}x^{k+1}|<\cdots<|a_nx^n|<\cdots$。我們看到，當 $n\to+\infty$ 時，要 a_nx^n 項趨近於零，這是不可能的。這就是說，當 $|x|>\frac{1}{L}$ 時，級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是發散的。由此而知 $\frac{1}{L}=\rho$。 (證明完畢)

例 1. 求級數

$$x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots \tag{3}$$

的收斂區域。

解 引用上述實用法則以決定 ρ:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=1。$$

因此收斂區間是$(-1,+1)$。現在應當研究收斂區域。爲此，只須研究界點: $x=+1$ 及 $x=-1$。若 $x=+1$，則級數 $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$ 是常減正負項交錯的級數，故是收斂的。



圖 71.

若 $x=-1$，我們有 $-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\cdots$ 級數也是收斂的(參閱 § 69 中第三種情形)。收斂區域表示如圖 71。

例 2. 求級數 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\cdots$

的收斂區域。

解 應用實用法則:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0。$$

因此該級數對於所有的 x 數值都是收斂的。

習 題

求下列各級數的收斂區域:

1. $1+x+x^2+x^3+\cdots$。

答　$-1<x<+1$。

2. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$。

答　$-1<x\leqslant+1$。

3. $x+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\cdots$。

答　$-1<x<+1$。

4. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\cdots$。

答　$-1\leqslant x<+1$。

5. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$。

答　所有的 x。

6. $1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots$。

答　所有的 θ。

7. $1-\frac{\Phi^3}{3!}+\frac{\Phi^5}{5!}-\frac{\Phi^7}{7!}+\cdots$。

答　所有的 Φ。

8. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$。

答　$-1\leqslant x\leqslant+1$。

9. $1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$。

答　$-1<x<+1$。

收斂區域的圖形❶。







圖 72.











圖 73.

10. $1+x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\cdots$。　答　$-1\leqslant x\leqslant+1$。

11. $2x+\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}+\frac{5x^4}{4!}+\cdots$。　答　所有的 x。

12. $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot3^2}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\frac{x^4}{4\cdot3^4}+\cdots$。　答　$-3\leqslant x<+3$。

13. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots$。　答　$-1<x<+1$。

14. $\frac{2x}{2}+\frac{2^2x^2}{5}+\frac{2^3x^3}{10}+\cdots+\frac{2^nx^n}{n^2+1}+\cdots$。　答　$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{1}{2}$。

15. $1+\frac{x}{2\cdot1}+\frac{x^2}{2^2\cdot2}+\frac{x^3}{2^3\cdot3}+\frac{x^4}{2^4\cdot4}+\cdots$。　答　$-2\leqslant x<2$。

❶ 若收斂區間$(-\rho,+\rho)$的界點在收斂區域之內，則我們用黑點來表示它，若不在其內，我們不把它表示出來。

16. $\frac{1}{3}+\frac{2x}{2\cdot 3^2}+\frac{3x^2}{2^2\cdot 3^3}+\frac{4x^3}{2^3\cdot 3^4}+\cdots$。 答 $-6<x<+6$。

17. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{2x^2}{2\cdot 2\cdot 3}+\frac{3x^3}{2^2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4x^4}{2^3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$。 答 $-2\leqslant x<+2$。

18. $1+4x+9x^2+16x^3+25x^4+\cdots$。

19. $\frac{2x^2}{3}+\frac{4x^3}{8}+\frac{8x^4}{15}+\cdots+\frac{2^{n-1}x^n}{n^2-1}+\cdots$。

20. $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{x}{3^{\frac{1}{3}}}+\frac{x^2}{3^{\frac{1}{4}}}+\frac{x^3}{3^{\frac{1}{5}}}+\cdots$。

21. $1+x+2x^2+3x^3+\cdots$。

22. $10x+100x^2+1000x^3\cdots$。

23. $1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots$。

24. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$。

§81. 冪級數的和

設級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

是所給的冪級數，其收斂區間爲$(-\rho,\ +\rho)$。於是按阿培爾定理(§80)，級數(1)，在每一個包含在收斂區間內的線段$[a,\ b]$上，是正規收斂的(圖 74)。由此而知，若以$f(x)$表示在收斂區域內冪級數的和：



圖 74.

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{2}$$

則函數$f(x)$是收斂區間內每個線段$[a,b]$上的連續函數。

特別是，$f(x)$在收斂區間內每一點x_0處是連續的。

§82. 冪級數的微分法與積分法

設冪級數 $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

具有收斂區間$(-\rho,\ +\rho)$。將該級數形式地逐項微分，我們得到新的冪級數：

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots。\qquad (2)$$

預備定理 從一個冪級數逐項微分所得的冪級數，具有與原來冪級數相同的收斂區間。

證明 首先，按阿培爾定理（§80），我們知道：在收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 內每一個所給線段 $[a, b]$ 上，原來的冪級數（1）是正規收斂的，並具有某個高界幾何級數 $1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^n+\cdots$，其中 θ 就線段 $[a, b]$ 來說，是一個正的定數，且小於 $1, 0<\theta<1$。這意味着，在線段 $[a, b]$ 上，當 n 大於某個適當的界 $N(n\geqslant N)$ 時，我們就有不等式 $|a_nx^n|<\theta^n$。

對於微分後的級數（2）的一般項，當 $n\geqslant N$ 時，我們有不等式：

$$|na_nx^{n-1}|=\frac{n}{|x|}\cdot|a_nx^n|<\frac{n}{|x|}\theta^n=\frac{\theta}{|x|}\cdot n\theta^{n-1};$$

這裏 x 是線段 $[a, b]$ 上任意一個異於原點 O 的固定點。

因為級數 $1+2\theta+3\theta^2+\cdots+n\theta^{n-1}+\cdots$ 當 $0<\theta<1$ 時是收斂的（由收斂的檢驗法，或由其和 $\frac{1}{(1-\theta)^2}$ 立即可知），故由此而知，冪級數（2）在級數（1）的收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 內到處都是收斂的。

其次，假若某定點 x 在收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 之外，亦即若 $|x|>\rho$，則從阿培爾定理的證明（§80）即知：原來的級數（1）的一般項 a_nx^n，當 $n\to+\infty$ 時，不可能趨近於零[1]。由此可知，當 $n\to+\infty$ 時，a_nx^{n-1} 不能趨近於零，而其乘積 na_nx^{n-1} 更加不能趨近於零了。這就是說，微分所得的級數（2），在該點 x 處確實是發散的。

因此，微分後所得的級數（2），在區間 $(-\rho, +\rho)$ 內是收斂的，而在其外是發散的。隨之，$(-\rho, +\rho)$ 是這兩個級數——原來的級數

---

[1] 請讀者參看 §80 阿培爾定理的證明，我們現在指出：這個證明，實在說來，並不需要級數（1）在 x_0 點的地方一定收斂，而只需要：當 $n\to+\infty$ 時，$a_n x^n$ 這一項的絕對值是保持為有界的，因為我們完全不需要 η（在那裏，$|a_n x^n|<\eta$）趨近於零。阿培爾定理的整個證明，仍然跟以前一樣，完全有效。由此可知：在位於收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 外的每一點 x 處，不僅冪級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 是發散的，而且他的一般項 $a_n x^n$，當 $n\to+\infty$ 時，也不可能是有界的。

(1)及微分後的級數(2)——的公共收斂區間。 (證明完畢)

因爲冪級數,在其收斂區間$(-\rho, +\rho)$內的任意一固定的線段$[a, b]$上,是均勻收斂的,故由均勻收斂級數(§79)的性質 II 及 III 而知:冪級數

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (3)$$

在其收斂區間$(-\rho, +\rho)$內,可以逐項微分任意次或逐項積分任意次,而且這樣所得到的冪級數,仍具有相同的收斂區間$(-\rho, +\rho)$。

這樣,微分後,得:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=\qquad 2a_2+3\cdot2\cdot a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$f'''(x)=\qquad 3\cdot2\cdot1a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又積分後,有:

$$\int_0^x f(t)dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots\text{等等。}$$

由此我們首先得出結論:每個冪級數(3)

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (3)$$

的和$f(x)$是一個完全特別的函數,因爲它不僅具有一階導數$f'(x)$,而且具有二階導數$f''(x)$、三階導數$f'''(x)$、以及一般說來,任意n階的導數$f^{(n)}(x)$(不論n是怎樣的自然數);而且,所有這些導數,在收斂區間$(-\rho, +\rho)$內每一點x處,是連續的。

我們可以把冪級數的和$f(x)$,簡短地說爲可無窮次微分的函數。

§83. 馬克勞林的無窮級數

設冪級數

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (1)$$

具有收斂區間$(-\rho, +\rho)$,其中$\rho>0$。

把它微分無數次:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2+3\cdot 2\cdot 1a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)= \qquad\qquad 1\cdot 2\cdot 3\cdots na_n+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在各式中,設 $x=0$, 可得:

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=1\cdot a_1,\ f''(0)=1\cdot 2\cdot a_2,\ f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3a_3,\cdots,$$
$$f^{(n)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdots na_n,\ \cdots。$$

由此我們得到下述重要結論:

如果已經知道可無窮次微分的函數 $f(x)$ 是一個冪級數的和:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

但不知其係數,我們可按馬克勞林公式來決定這些係數:

$$a_0=f(0),\ a=\frac{f'(0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots。\qquad (2)$$

當冪級數 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 具有收斂區間 $(-\rho,\ +\rho)$, 並且在該區間內以函數 $f(x)$ 爲其和時:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\qquad (1)$$

我們說:函數 $f(x)$ 在區間 $(-\rho,\ +\rho)$ 內展開爲冪級數了;這時根據公式(2),我們有恆等式:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots。\qquad (\text{I})$$

展開式(1),稱爲馬克勞林無窮級數。

§84. 馬克勞林無窮級數與馬克勞林有限公式的比較

不要以爲,馬克勞林無窮級數本身極其明顯,因此不值得追究它是

否正確。這裏却隱藏着很多奧妙。

這裏說的是：乍看起來，好像，當我們有任意一個可無窮次微分的函數 $f(x)$ 時，將它"展開爲冪級數"，是極其簡單的事；爲此，只須計算它在 $x=0$ 處的所有導數；$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，…；此外，將這些導數各依次除以 $1, 1!, 2!, 3!, \cdots$；最後由所得到的係數，組成馬克勞林無窮級數（I）。乍看起來，好像這裏一點疑問也沒有，因爲覺得：馬克勞林無窮級數應當是收斂的，也應當以被展開的函數 $f(x)$ 爲其和。但是實際上，事情遠爲複雜和微妙。

首先，按馬克勞林法則，就所給的函數 $f(x)$ 所作的無窮級數（I），可能到處（除 $x=0$ 這一點外）都是發散的。當求得導數 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，…，$f^{(n)}(0)$，… 的數值隨 $n\to\infty$ 而劇烈增加時，就可能發生這種情形。例如，要是 $f^{(n)}(0)=(n!)^2$，則馬克勞林級數到處（除 $x=0$ 外）都是發散的，它並無意義。

其次，即令按馬克勞林法則，就函數 $f(x)$ 所作的級數（I），在其收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 內，$\rho>0$，是收斂的，但是這個冪級數的和，可能根本不是所給的函數 $f(x)$，而是完全跟函數 $f(x)$ 不相干的別的函數 $\Phi(x)$；除 $f^{(n)}(0)=\Phi^{(n)}(0)$ 這些等式之外，跟 $f(x)$ 並無其他關係。

例如，假若 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，而且我們設 $f(0)=0$，則我們有：$0=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=$ $=\cdots$。因此，按馬克勞林法則計算出來的冪級數是：$0+0x+0x^2+\cdots+0x^n+\cdots$ 其和恒等於零。所以根本不等於"被展開"的函數 $e^{-\frac{1}{x^2}}$。

所有能從馬克勞林公式得出的結論，只不過是：假若**所討論的函數 $f(x)$ 可以作爲冪級數之和時**，則這種級數只有一個，其係數應當按馬克勞林法則來確定。至於牽涉到一個基本問題："所給的、可無窮次微分的函數 $f(x)$ 是不是可以作爲冪級數之和；"亦即，"它能不能展開爲冪級數？"，則馬克勞林無窮級數並不能回答。

爲了要解決這個問題，尋常總用馬克勞林的有限公式，它把所給函數 $f(x)$ 與馬克勞林無窮級數的首 n 項之和，兩者的差估計出來；我們

以 $R_n(x)$ 表示這個差：

$$R_n(x)=f(x)-\Big[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\Big]。\quad (1)$$

顯然，若要馬克勞林無窮級數(1)的和在該級數的收斂區間 $(-\rho,\ +\rho)$ 內等於函數 $f(x)$，則必要與充分條件是：在區間 $(-\rho,\ +\rho)$ 內我們處處有等式：

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0。$$

因爲等式(1)又可以寫爲：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),\quad (2)$$

故該等式稱爲馬克勞林有限公式（非"級數"），而右邊末項 $R_n(x)$ 稱爲補充項（或不太正確的稱爲餘項）。

欲使可微分無窮次的函數展開爲在區間 $(-\rho,\ +\rho)$ 內收斂的冪級數，充分與必要條件是：當 n 無限增加時，在該區間內每一點，補充項都趨近於零。

補充項 $R_n(x)$ 的研究常常是困難的。爲了避開這個研究，尋常總把複變量函數展開爲冪級數；關於這種函數，有着極具功效的一般原理，使我們完全不用考慮 $R_n(x)$。這些原理是複變量函數論裏的課題（參閱下一章）。但是，現在既然講的是實變量，只好來估計補充項 $R_n(x)$ 的數值了。

爲着力求研究起來最方便起見，人們給這補充項寫成各種形式。某些形式的補充項對於一類函數 $f(x)$ 是很便利的；對於另一類函數，又有另一些形式的補充項。這裏並沒有一般的法則。現在，我們講補充項 $R_n(x)$ 的一種最簡單的形式，它是從台勞中值定理推出來的（參閱上册 §150）。亦即，在台勞中值公式中，設 $a=0$, $b=x$，得：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \qquad (3)$$

其中ξ為中值，位於0與x之間。由這個等式而得補充項的最簡單的形式：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n。 \qquad (4)$$

這個式子的右邊常稱為"拉格蘭日形式的餘項"。在許多情形下這個形式的應用是很困難的；因為我們不知道，究竟中值ξ在線段$[0, x]$上什麼地方。但是對於e^x, $\sin x$及$\cos x$這三個函數，將餘項寫為拉格蘭日形式，很快可以估計出它的大小。

例1. 將函數$f(x)=e^x$展開為冪級數。

解 我們有$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $\cdots$。故$f(0)=1$, $f'(0)=1$, $\cdots$。寫為拉格蘭日形式的餘項是$R_n(x)=e^\xi\frac{x^n}{n!}$，其中$\xi$是0與$x$之間的數。由此而知：

$$|R_n(x)|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^n}{n!}。$$

但是級數$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$是到處收斂的。所以我們有$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$。因此當$n\to+\infty$時，對於任意的$x$都有$R_n(x)\to0$。

最後對於所有的x數值，有：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots。 \qquad (5)$$

例2. 將函數$f(x)=\sin x$展為冪級數。

解 我們有：$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$及$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x$。其後的諸導數，顯然是周期性地輪迴出現的。$n$階導數的一般公式是：$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$。$x=0$時，有：$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$等等。隨之我們有四個數0, 1, 0, -1，循環出現。拉格蘭日形式的餘項是：

$$R_n(x)=\sin\left(\xi+n\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^n}{n!}。$$

隨之，$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\to0$（對於每個$x$，及當$n\to\infty$時）。最後乃得處處收斂的展開式：

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots。\quad (6)$$

例 3. 將 $f(x)=\cos x$ 展爲冪級數。

解 我們可以照着上面對 $\sin x$ 所做的那樣，把餘項寫爲拉格蘭日形式，再來研究。但是這大可不必，因爲現在可利用收斂冪級數的微分法則。這樣，將上面所得展開式(6)逐項微分後，立即可得 $\cos x$ 的馬克勞林展開式：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots。\quad (7)$$

對於所有的 x 數值，這展開式是收斂的。

若要把別的函數展開爲冪級數，必須首先給餘項 $R_n(x)$ 以另外的形式，因爲拉格蘭日形式已不夠用了；而且，利用了這些另外的形式之後，還必須證明馬克勞林級數在其收斂區間內收斂爲所給函數 $f(x)$。但是這種研究，即使對於初等函數來說，也是很難的。

幸而，除了這條馬克勞林有限公式過渡到馬克勞林無窮級數的直路之外，還有間接的、極富於各種可能性的道路。這條路是這樣的，我們直接討論馬克勞林級數，先定出它的收斂區間，然後根據該級數中係數的算術結構，來看出它所表示的究竟是什麼函數。我們現在把這個方法用到二項式級數上去。

§85. 二項式級數

這個重要級數的形式如下：

$$1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^nx^n+\cdots,\quad (1)$$

其係數是按下面的公式計算的：

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\cdots(m-\overline{n-1})}{n!}。\quad (2)$$

顯然，當 m 是自然數亦即正整數時，係數 C_m^n 等於“n 個東西裏拿 m 個出來的組合數”；這時，級數(1)到 x^m 項就自動終止，因爲所有其後各項的係數均爲零。在這種情形，級數(1)的和等於 $(1+x)^m$，這就是牛頓二項式定理。

假若 m 不是自然數，又不等於零，則 C_m^n 這些係數中沒有一個會等

於零，級數(1)確實是無窮的。我們要定出這種情形下級數的收斂區間$(-\rho,\ +\rho)$，並求該區間內它的和。

按達蘭白檢驗法(§69)，作比值：

$$\frac{C_m^{n+1}x^{n+1}}{C_m^n x^n}=\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x。$$

我們看到：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|C_m^{n+1}x^{n+1}|}{|C_m^n x^n|}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m+1}{n}-1\right|\cdot|x|=|x|。$$

因此，當$|x|<1$時，二項式級數(1)是收斂的；當$|x|>1$時，它是發散的，因爲這時，它的一般項不能趨近於零。

這樣，當m不是自然數或零時，二項式級數(1)的收斂區間是$(-1,\ +1)$。

爲求二項式級數(1)之和，我們用$f(x)$表示該和：

$$f(x)=1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^nx^n+\cdots。\tag{1*}$$

微分這個等式(我們可以這樣做)，求得：

$$f'(x)=C_m^1+2C_m^2x+\cdots+nC_m^nx^{n-1}+\cdots。\tag{3}$$

用x乘兩邊，得：

$$xf'(x)=C_m^1x+2C_m^2x^2+\cdots+nC_m^nx^n+\cdots。$$

再與前一式加起來，得：

$$(1+x)f'(x)=C_m^1+(2C_m^2+C_m^1)x+\cdots+$$
$$+[(n+1)C_m^{n+1}+nC_m^n]x^n+\cdots。\tag{4}$$

現在計算級數(4)的係數。按公式(2)，求得：

$$(n+1)C_m^{n+1}+nC_m^n=(n+1)\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}+$$

$$+n\frac{m(m-1)\cdots(m-\overline{n-1})}{n!}=$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-\overline{n-1})}{n!}\cdot[(m-n)+n]=mC_m^n。$$

故等式(4)可改寫爲:

$$(1+x)f'(x)=m[1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^nx^n+\cdots]。$$

由此得:

$$(1+x)f'(x)=mf(x)。\qquad (5)$$

關係式(5)立卽可給出未知函數$f(x)$。事實上,我們有:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{1+x} \quad 或 \quad \frac{d}{dx}[\ln f(x)]=\frac{m}{1+x}。$$

積分後,得:

$$\ln f(x)=\int\frac{m}{1+x}dx=m\ln(1+x)+C=\ln(1+x)^m+C。$$

由此得:

$$f(x)=e^c(1+x)^m。\qquad (6)$$

因爲當$x=0$時,二項式級數的數值等於1,故$f(0)=1$。在(6)式中,設$x=0$,求得$1=e^c$。故

$$f(x)=(1+x)^m。$$

這樣,我們有一個在收斂區間$(-1, +1)$內的重要的展開式:

$$(1+x)^m=1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^nx^n+\cdots。\qquad (7)$$

例 利用二項式級數求$\sqrt{630}$的近似値。

解 最接近於630的整平方爲$625=25^2$,因此:

$$\sqrt{630}=\sqrt{625+5}=25\left(1+\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}},$$

在這種情形,二項式級數是:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots。$$

設$x=\frac{1}{125}=0.008$,由此得:

$$\left(1+\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}=1+0.004-0.000008+0.000000032-\cdots。$$

故 $$25\left(1+\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}=25+0.1-0.0002+0.0000008=25.099801。$$

因爲展開式是常減的又是正負項交錯的,故誤差不超過最後一項,亦卽<0.0000008。

習 題

1. 利用二項式級數來證明：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

直接用除法證實所得結果。

2. 利用二項式級數，求下列各數的近似值：

(a) $\sqrt{404}$ (b) $\sqrt[3]{990}$ (c) $\sqrt[3]{130}$ (d) $\sqrt[4]{80}$

(e) $\sqrt[5]{30}$ (f) $\frac{1}{98}$ (g) $\frac{1}{10.3}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{102}}$

(i) $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$ (j) $\frac{1}{\sqrt[4]{620}}$ (k) $\frac{1}{\sqrt[3]{1010}}$ (l) $\sqrt{\frac{25}{26}}$

3. 利用正弦的展開式(6)(參閱§84)，求 sin 1，準確到四位小數。

解 我們有

$$\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}-\cdots。$$

把正項及負項各項相加得：

$$1=1.00000 \qquad \frac{1}{3!}=0.16667$$

$$\frac{1}{5!}=0.00833 \qquad \frac{1}{7!}=0.00020$$

$$\overline{\ \ 1.00833\ \ } \qquad \overline{\ \ 0.16687\ \ }$$

故 $\sin 1=1.00833-0.16687=0.84146$。

結果準確到第五位小數，因為誤差小於 $\frac{1}{9!}=0.000003$。

§86. 對數級數

幾何級數 $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的收斂區間為$(-1, +1)$。以 x 代 $-x$，得

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

積分後，得：

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

最後，作出左邊的積分，我們求得 $\ln(1+x)$ 的馬克勞林級數的展開式：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots。\qquad (1)$$

我們知道（參閱§82），對級數施行積分法的結果並不改變收斂區間，因此展開式（1）具有收斂區間 $(-1,\ +1)$；在該區間內，它的和等於 $\ln(1+x)$。

但是，爲計算對數，我們並不利用級數（1），而利用函數 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的冪級數展開式。爲求這展開式，在展開式（1）中，以 $-x$ 代 x，我們得到級數：

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots,$$

其收斂區間仍爲 $(-1,\ +1)$。從（1）減去這個級數，求得：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right]。\qquad (2)$$

所得級數的收斂區間是 $(-1,\ +1)$。

例　估計對數的值。

爲把級數（2）化爲更便於估計的形式，取二正數 M 及 N，且設 $M>N$。令

$$x=\frac{M-N}{M+N},\ 得\ \frac{M}{N}=\frac{1+x}{1-x}。$$

這時，對於所有的正數 M 及 N，$(M>N)$。顯然有 $0<x<1$。級數（2）給出：

$$\ln\frac{M}{N}=2\left[\left(\frac{M-N}{M+N}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\right]。\qquad (3)$$

對於所有的正數 M 及 $N(M>N)$，這級數都是收斂的，很宜於作估值之用。

例如，設 $M=2$ 及 $N=1$，則 $\ln\frac{M}{N}=\ln 2$，$\frac{M-N}{M+N}=\frac{1}{3}$。代入（3），得 $\ln 2=0.69315\cdots$。

此外，設 $M=3$，$N=2$，則

$$\ln 3=\ln 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\right]=1.09861\cdots。$$

我們只要計算質數的對數，因爲非質數的對數可由它們得出來，例如：

$$\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2=2.07944\cdots,$$

$$\ln 6=\ln 3+\ln 2=1.79176\cdots。$$

所算出的對數是自然對數，底數爲 $e=2.718281828459045\cdots$。爲求布列格對數或十制對數(以 10 爲底)，應該引用變換公式

$$\lg a=\frac{\ln a}{\ln 10}。$$

例如
$$\lg 2=\frac{\ln 2}{\ln 10}=\frac{0.693\cdots}{2.302\cdots}=0.301\cdots。$$

但是，在實際造對數表時，只要利用級數算出爲數不多的一些對數來；所有其餘的對數，可利用關於對數的定理，及各種幫助速算的巧妙計算機算出來。

§87. [arc tan x]的展開式

取展開式：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad (1)$$

這是在展開式 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ 中用 $-x^2$ 代替 x 後所得到的結果。因此，收斂區間仍爲$(-1,\ +1)$。由 0 至 x 積分級數(1)，直接可得：

$$[\text{arc tan } x]=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, \qquad (2)$$

這展開式的收斂區間爲$(-1,\ +1)$，因爲，收斂區間並不因微分或積分而有所改變(§82)。展開式之和，是 arc tan x 的主支(參閱上册 §105)，而不是別支。因此我們把它寫在方括號中。

§88. [arc sin x]的展開式

取二項式展開式：

$$(1+x)^m=1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^nx^n+\cdots, \qquad (1)$$

其收斂區間，除了當級數(1)自動中斷，亦即當 m 是正整數或零的時候之外，恆爲$(-1,\ +1)$。現在設 $m=-\frac{1}{2}$，以 $-x^2$ 代 x，得.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-C_{-\frac{1}{2}}^1x^2+C_{-\frac{1}{2}}^2x^4-C_{-\frac{1}{2}}^3x^6+\cdots+(-1)^nC_{-\frac{1}{2}}^nx^{2n}+\cdots.$$

由 0 至 x 積分，得：

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x - C^1_{-\frac{1}{2}}\frac{x^3}{3} + C^2_{-\frac{1}{2}}\frac{x^5}{5} - C^3_{-\frac{1}{2}}\frac{x^7}{7} + \cdots +$$
$$+(-1)^n C^n_{-\frac{1}{2}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots。\qquad (2)$$

等式左邊是 $\arcsin x$ 的主支，亦卽 $[\arcsin x]$，而並非旁支（參閱上册 §110）。現在求右邊的係數：

$$C^n_{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-\overline{n-1}\right)}{n!} =$$
$$= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}。$$

隨之，等式（2）可改寫為：

$$[\arcsin x] = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots +$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \cdots。$$

展開式的收斂區間為 $(-1, +1)$。

習　題

證實下列函數的馬克勞林級數展開式，並決定其收斂區間。

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$。

答　所有的 x 值。

2. $\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}} + \cdots$。

答　$(-a, +a)$。

證實下列展開式：

3. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$。

4. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$。

5. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sqrt{3}x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$。

6. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+2x+2x^2+\frac{8x^3}{3}+\cdots$。

7. $\operatorname{arc}\tan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots$。

8. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$。

9. $\ln(x+\sqrt{1-x^2})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{9x^5}{5!}-\cdots$。

10. $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\cdots$。

就下列各函數，求其馬克勞林級數至第三項：

11. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

12. $\sin(x+1)$。

13. $e^{\sin\theta}$。

14. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$。

直接代入冪級數中，算至足夠多的項數，以得下列各值：

15. $e=2.7182\cdots$。

解 取展開式 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$。以 $x=1$ 代入，則 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+$ $+\cdots$。

第一項 $=1.00000$

第二項 $=1.00000$

第三項 $=0.50000$

第四項 $=0.16667\cdots$（以 3 除前項）

第五項 $=0.04167\cdots$（以 4 除前項）

第六項 $=0.00833\cdots$（以 5 除前項）

第七項 $=0.00139\cdots$（以 6 除前項）

第八項 $=0.00020\cdots$（以 7 除前項）

合計 $e=2.7182\cdots$。

16. $\operatorname{arc}\tan\left(\frac{1}{5}\right)=0.1973\cdots$。

17. $\cos 1=0.5403\cdots$。

18. $\cos 10^\circ=0.9848\cdots$。

19. $\sin 0.1=0.0998\cdots$。

20. $\operatorname{arc}\sin 1=1.5708\cdots$。

21. $\sin\frac{\pi}{4}=0.7071\cdots$。

22. $\sin 0.5=0.4794\cdots$。

23. $e^2=1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots=7.3891\cdots$。

24. $\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\cdots=1.6487\cdots$。

§89. 冪級數的運算

設已給二冪級數:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots。$$

假定第一級數的收斂區間爲$(-A, +A)$，第二級數的收斂區間爲$(-B, +B)$，其中 $A>0, B>0$。

這些級數可以經過下列運算組合起來:

I. **加法**　可得新的冪級數:

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots。$$

II. **減法**　可得新的冪級數:

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots。$$

III. **乘法**　可得新的冪級數:

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots。$$

這些運算，對於同時在第一及第二級數的收斂區間$(-A, +A)$及$(-B, +B)$中的 x 數值，都成立；因爲這時二級數是絕對收斂的，故級數可以像平常的有限和一樣，相加，相減，相乘(§71)。因此，所得到的新冪級數的收斂區間，並不小於原來兩個收斂區間$(-A, +A)$，$(-B, +B)$中最小的那個區間。

當我們作冪級數的除法時，情形就完全兩樣。

IV. **除法**　用一個冪級數去除另一個冪級數時，

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

假若 a_0 不等於零，則當而且僅當 $b_0\neq 0$ 時，其商才可寫爲冪級數形式，否則 $f(0)$ 變爲無限大了。

再添一句;除法所得的新冪級數 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ 的收斂區間,很難定出,它可能比原來的兩個收斂區間 $(-A, +A)$ 及 $(-B, +B)$ 小得多。

爲得到係數 $c_0, c_1, c_2, \cdots$, 應將級數 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ 與 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ 相乘,並令乘積的係數各等於級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 的係數,亦即應寫:

$$a_0=b_0c_0,$$
$$a_1=b_1c_0+b_0c_1,$$
$$a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

於是我們得到一些方程,從這些方程,可以一個個的求得商級數的未知係數 $c_0, c_1, c_2, \cdots$。

例1. 求 $e^x\sin x$ 的冪級數。

解 我們有:
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\cdots,$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots。$$

相乘,求得:
$$e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\cdots。$$

例2. 從 $\cos x$ 的冪級數求 $\sec x$ 的級數。

解 我們有 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 及 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$。

這裏非常簡單,作除法時,利用下面的方法:設 $\cos x=1-z$, 則 $z=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\cdots$。

另一方面, $\sec x=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots, |z|<1$。

顯然, $z^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+\cdots$; $z^3=\frac{x^6}{8}+\cdots$, 由此得

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots。$$

習 題

證實下列級數:

1. $e^{-\theta}\sin\theta=\theta-\theta^2+\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^4}{30}+\cdots$。

2. $\frac{\cos x}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}+\cdots$。

3. $\frac{\sin x}{1-x}=x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\frac{5x^4}{6}+\frac{101x^5}{120}+\cdots$。

4. $\sin^2 x=x^2-\frac{2x^4}{3!}+\frac{32x^6}{6!}+\cdots$。

5. $(1+x)\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\cdots$。

6. $\frac{e^x}{1+x}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{8}+\cdots$。

7. $e^x\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^5}{40}+\cdots$。

8. $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\cdots$。

9. $\sin x\cos\sqrt{x}=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\cdots$。

10. $\frac{\ln(1+x)}{\cos x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\cdots$。

11. $(1-x)\arcsin x=x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{3x^6}{40}+\cdots$。

12. $(1+x)\arctan x=x+x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{5}-\cdots$。

13. $x\sin\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{48}+\frac{x^6}{3840}-\cdots$。

14. $e^{-x}\cos\sqrt{x}=1-\frac{3x}{2}+\frac{25x^2}{24}-\frac{331x^3}{720}+\cdots$。

15. $e^{\frac{x}{2}}\sin 2x=2x+x^2-\frac{13x^3}{12}-\frac{5x^4}{8}+\cdots$。

16. $\sqrt{1+\sin x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+\cdots$。

就下列各函數，求其冪級數，寫出 x^5 以前的各項。

17. $e^{-\frac{x}{2}}\cos x$。　　18. $\frac{\sin 2x}{\cos x}$。　　19. $e^x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$。

20. $\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$。　　21. $\sqrt{2-\cos x}$　　22. $\sqrt{1+x}\ln(1-x)$。

利用對數級數(3)(參閱§86)，又已知 $\ln 2=0.69315$ 及 $\ln 3=1.09861$，計算下列各對數。

23．$\ln 5=1.60944\cdots$。　　　　24．$\ln 7=1.94591\cdots$。

25．$\ln 11=2.39790\cdots$。　　　　26．$\ln 13=2.56495\cdots$。

27．微分 $\tan x$ 的級數，以求 $\sec^2 x$ 的級數。

28．積分 $\tan x$ 的級數，以求 $\ln\cos x$ 的級數。

29．求積分 $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ 的近似值。

解　在展開式 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$ 中以 x^2 代 x，得 $\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\cdots$ 由此得：

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{10}}{120}-\cdots\right)dx$$

近似等於

$$\approx\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^{11}}{1320}\right]_0^1=0.3333-0.0238+0.0008=0.3103\text{。}$$

利用級數，求下列各積分的近似值：

30．$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$。　　答　0.764。　　31．$\int_0^1 e^{-x^2}dx$。　　答　0.747。

32．$\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})dx$。　　答　0.071。　　33．$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}dx$。　　答　0.9226。

34．$\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-x}}$。　　答　0.0214。　　35．$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$。

36．$\int_0^1 e^x\cos\sqrt{x}\,dx$。　　37．$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^2)dx$。　　38．$\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-x}}$。

39．$\int_0^1 \sqrt{2-\cos x}\,dx$。　　40．$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{\cos x}dx$。

§90.　台勞級數

所謂台勞無窮級數，就是按差 $(x-a)$ 的增冪排列，並且有常係數的級數，亦卽下面形式的級數：

$$b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots\text{。}\qquad(1)$$

假若我們設　　　　$x-a=z$，

則台勞級數(1)可寫爲

$$b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots\text{。}\qquad(2)$$

這就是關於自變量 z 的馬克勞林無窮級數。我們知道，馬克勞林級數

(2)應該在某個區間 $(-\rho, +\rho)$ 內是絕對收斂的，而在該區間外則應是發散的，因爲它的一般項在區間外不能趨近於零。因此，當 $|z|<\rho$ 時，級數(2)是收斂的；$|z|>\rho$ 時，則是發散的。

因爲 $|z|=|x-a|$，故有定理：

台勞級數 $b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots$ 在某個區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 內是絕對收斂的；在該區間外，則因其一般項不能趨近於零，故級數是發散的。

這個區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 的中心爲 a 點，該區間稱爲台勞級數的收斂區間(圖 75)。關於函數 $f(x)$——在區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 內是台勞級數之和——我們說："它展成 $(x-a)$ 的羃級數"或"函數 $f(x)$ 在 a 點展爲台勞級數"。在這種情形，等式：

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots \qquad (3)$$

在整個區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 內成立，稱爲函數 $f(x)$ 在 a 點的台勞級數展開式。



圖 75.

這個名稱非常適合，因爲台勞級數(3)的係數 $b_0, b_1, b_2, \cdots$，是由函數 $f(x)$ 及其諸導數在 a 點處的數值所決定的。

爲看到這點，用 $\varphi(z)$ 記馬克勞林級數在其收斂區間 $(-\rho, +\rho)$ 內的和：

$$\varphi(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots\text{。} \qquad (4)$$

我們知道：在這種情形，$\varphi(z)$ 是對 z 可微分無窮次的函數，且係數 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 是按馬克勞林公式來決定的：

$$b_n=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\text{。} \qquad (5)$$

在代入 $z=x-a$ 後，馬克勞林級數（4）就變爲台勞級數（3）的形式了。故有恆等式：

$$\varphi(x-a)=f(x)。\tag{6}$$

一次次的對 x 微分，我們求得：$\varphi'(x-a)=f'(x)$，$\varphi''(x-a)=f''(x)$，…，$\varphi'''(x-a)=f'''(x)$，…等等。在（6）式及這些等式中，設 $x=a$，卽得：

$$\varphi(0)=f(a),\ \varphi'(0)=f'(a),\ \varphi''(0)=f''(a),\ \cdots$$
$$\cdots,\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a),\ \cdots。\tag{7}$$

把求得的 $\varphi^{(n)}(0)$ 代入等式（5），乃得台勞法則：

$$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}。\tag{8}$$

於是，台勞級數（3）在 a 點取得下面的形式：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots。\tag{I}$$

我們再講一遍：台勞級數，在某個以 a 爲中心的區間 $(a-\rho,\ a+\rho)$ 內是收斂的；而在該區間外，則是發散的。台勞級數（I）的和 $f(x)$，在收斂區間 $(a-\rho,a+\rho)$ 內，是可以微分無窮次的。同時，在包含於收斂區間 $(a-\rho,a+\rho)$ 內的每一個線段 $[c,\ d]$ 上，台勞級數是正規收斂的。

台勞級數（I）的收斂區間的半段長的這個數 ρ，在許多情形下，可以像決定馬克勞林級數（4）的收斂區間時那樣，用同一個法則求出，也就是，若求得極限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=L,$$

卽知

$$\rho=\frac{1}{L}。$$

等式（I）右邊的級數，名叫台勞無窮級數，但不要把它跟下面的台勞有

限公式混爲一談：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n;$$

這個公式是在上册 §150 中得到的，那時，它稱爲**台勞中值定理**[1]，因爲台勞有限公式末項中的數 ξ 是介於 a 及 x 之間的中值，但是到底它在 $[a, x]$ 中何處，我們還是不知道的。

這個台勞有限公式的末項，稱爲補充項（或不太正確的稱爲餘項），我們用 $R_n(x)$ 來記。

人們常給該補充項 $R_n(x)$ 以各種形式。寫爲形式：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

的補充項，稱爲"拉格蘭日形式的餘項"，這裏 ξ 是介於 a 與 x 之間的某個數。

要使區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 內可微分無窮次的函數 $f(x)$，在該區間內展爲收斂的台勞級數，充分與必要條件是：對於區間 $(a-\rho, a+\rho)$ 內的每一個 x 數值，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$。

有些時候，我們給台勞無窮級數（I）另一種形式。設 $a=x_0$，$x-a=h$，把這些數值代入台勞級數（I）中，得：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\cdots。\quad \text{(II)}$$

我們看到，以 x_0+h 代 x_0，所得函數 $f(x)$ 的新的數值，是寫爲 h 的冪級數的展開式的。

註 研究台勞有限公式中的補充項，卽使就初等函數來說，也是很難的事。因此，展開爲台勞級數時，恆引用複變量函數論的原理，使得

[1] 在那裏，我們用 b 代替這裏的 x。

根本無需研究補充項 $R_n(x)$。

習 題

求下列各級數的收斂範圍。

1. $1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+\cdots$。 答 $0<x<2$。

2. $1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{3^2}+\frac{(x-2)^4}{4^2}+\cdots$。 答 $1\leqslant x\leqslant 3$。

3. $1-\frac{(x+5)^2}{2!}+\frac{(x+5)^4}{4!}-\frac{(x+5)^6}{6!}+\cdots$。 答 所有的 x。

4. $(x+1)-\frac{(x+1)^3}{3}+\frac{(x+1)^5}{5}-\frac{(x+1)^7}{7}+\cdots$。

5. $(2x-1)+\frac{(2x-1)^2}{2^2}+\frac{(2x-1)^3}{3^3}+\frac{(2x-1)^4}{4^4}+\cdots$。

6. $1-(x+3)^2+(x+3)^4-(x+3)^6+\cdots$。

7. 將 $\ln x$ 在 $x=1$ 點展爲台勞級數。

解
$$f(x)=\ln x,\quad f(1)=0;$$
$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f'(1)=1;$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f''(1)=-1;$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3},\quad f'''(1)=2.$$

將這些數值代入台勞級數(I)中,得:

$$\ln x=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots.$$

這台勞級數的收斂區間是(0, 2)(參閱 § 86)。

8. 將 $\cos x$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 點展開。

解
$$f(x)=\cos x,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$f'=-\sin x,\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f''=-\cos x,\quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$f'''(x)=\sin x,\quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此 $$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,$$

該級數處處,就是對一切 x 都收斂。

9. 將 $\sin(x_0+h)$ 展開為 h 的冪級數。

解
$$f(x)=\sin x,\qquad f(x_0)=\sin x_0;$$
$$f'(x)=\cos x,\qquad f'(x_0)=\cos x_0;$$
$$f''(x)=-\sin x,\qquad f''(x_0)=-\sin x_0$$

代入公式(II),得

$$\sin(x_0+h)=\sin x_0+\frac{\cos x_0}{1!}h-\frac{\sin x_0}{2!}h^2-\frac{\cos x_0}{3!}h^3+\cdots。$$

10. 證實下列近似公式:

(a) $\sin x=\sin a+\cos a\cdot(x-a)$

(b) $\sin x=\sin a+\cos a\cdot(x-a)-\sin a\cdot\frac{(x-a)^2}{2}$

(c) $\cos x=\cos a-(x-a)\cdot\sin a$

(d) $\ln(10+x)=2.303+\frac{x}{10}$

(e) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0.5+0.8660\,x$

(f) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+2x+2x^2$。

實證下列台勞展開式:

11. $e^x=e^a\left[1+\frac{1}{1!}(x-a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2+\frac{1}{3!}(x-a)^3+\cdots\right]$。

12. $\sin x=\sin a+(x-a)\cos a-\frac{(x-a)^2}{2!}\sin a-\frac{(x-a)^3}{3!}\cos a+\cdots$。

13. $\cos x=\cos a-(x-a)\sin a-\frac{(x-a)^2}{2!}\cos a+\frac{(x-a)^3}{3!}\sin a+\cdots$。

14. $\ln(a+x)=\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}+\cdots$。

15. $\cos(a+x)=\cos a-x\sin a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\cdots$。

16. $\tan(x+h)=\tan x+h\sec^2 x+h^2\sec^2 x\cdot\tan x+\cdots$。

17. $(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+\cdots$。

18. 寫出 $\sin x$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 點的台勞展開式的前四項來。

答 $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right]$。

19. 寫出 $\tan x$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 點的台勞展開式的前四項來。

答 $\tan x=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\cdots$。

20. 將 $\ln x$ 在 $x=2$ 點展開到第四項。

21. 將 e^x 在 $x=1$ 點展開到第五項。

22. 將 $\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 點展開到第四項。

23. 將 $\cot x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 點展開到第三項。

第七章　複數,複變量及複變函數*

§91. 複數的算術及代數

複數是像

$$a+bi \tag{1}$$

這種形狀的式子,其中 a 及 b 是任何實數,字母 i 表示所謂虛單位 $\sqrt{-1}$ 這個記號:

$$i=\sqrt{-1}。 \tag{2}$$

數 a 叫做複數 $a+bi$ 的實部,第二項 bi 叫做複數的虛部;單是 b 這個數叫做虛單位的係數。

複數 $a+bi$ 適合實數所適合的一切代數及算術運算。其中如:複數可以相加,相減,相乘及相除。在作所有這些運算時,字母 i 都像實數那樣的來處理,但在最後的結果中,應該處處記住把字母 i 的平方 i^2 換成負的實數單位 -1,就是說,在作出的運算及最後的結果中,處處應設

$$i^2=-1。 \tag{3}$$

這樣,i^3 就應該換成 $-i$,因 $i^3=i^2i=-1\cdot i=-i$;又 i^4 應直接換爲 $+1$,因

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=+1;$$

其餘類推。

複數的加法　根據上面所講的法則,複數相加的做法如下:

$$(a+bi)+(a'+b'i)=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i。$$

最後得

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i。\qquad (\text{I})$$

複數的減法　應用上面所講的法則，我們同樣有：

$$(a+bi)-(a'+b'i)=a+bi-a'-b'i=(a-a')+(b-b')i。$$

最後得

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i。\qquad (\text{II})$$

複數的乘法　完全引用上述法則，得

$$(a+bi)\cdot(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=aa'+ab'i+$$
$$+a'bi-bb'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i。$$

最後得

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i。\qquad (\text{III})$$

複數的除法略爲複雜些；爲了使它容易做，應該引入兩個重要的概念。

(1)共軛複數　兩個複數，若只有 i 之前的正負號相異，叫做共軛複數。

這樣，兩個複數　　$a+bi$　及　$a-bi$

是共軛的。

共軛複數之所以重要，在於其乘積爲一正數。

爲證明這事，只要在兩複數乘積的公式(III)中，令 $a'=a$, $b'=-b$。我們顯然就得到：

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2, \qquad (4)$$

(2)複數的絕對值或模　設 $a+bi$ 爲任何複數。非負的數

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

稱爲該複數的絕對值或模，這裏根號恆取算術意義，也就是，恆取正值。

我們用符號 $|a+bi|$ 表示複數 $a+bi$ 的絕對值(或模)，因此有

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (5)$$

這裏根號取算術意義。

顯然，當而且僅當同時有 $a=0$ 及 $b=0$ 時，模 $|a+bi|$ 才會等於零；

故寫 $|a+bi|=0$ 時,就表示 $a=0$ 及 $b=0$,也就是 $a+bi=0$。這樣,當而且僅當複數等於零時,其模才等於零。

最後,我們注意,把複數 $a+bi$ 的模稱爲複數 $a+bi$ 的絕對值,並用符號 $|a+bi|$ 來記,並不是毫無用處隨便規定的。因爲當 $b=0$ 時,複數 $a+bi$ 就變爲實數 a,這時模 $|a+bi|$ 變得等於 $\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{a^2}=|a|$,也就是,變得等於實數 a 的絕對值。

這樣,模 $|a+bi|$ 是比實數 a 的絕對值 $|a|$ 更一般的一個概念。

複數的除法　求兩個複數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 的商 $\dfrac{a'+b'i}{a+bi}$ 時,我們用分母的共軛複數 $a-bi$ 來乘分子分母。首先應當申明、不能用零來除;因此須先假定分母 $a+bi$ 不等於零。這就表示分母的模 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ 是一個眞正的,也就是不等於零的正數。

我們有

$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{(a'+bi')(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(aa'+bb')+(ab'-a'b)i}{a^2+b^2}。$$

最後有:

$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i。\tag{IV}$$

公式(IV)指出了:只要分母不是零,兩複數的比仍是一複數。跟實數的情形一樣,這裏也不能用零作除數。

從公式(I)(II)(III)(IV)所得的總的結論,所有四個算術運算,施行在複數之間,結果仍得一複數;在特殊情形下,這個結果也可能是實數。

由於在計算時,虛數單位 i 可以像實變量那樣來處理,只不過在計算過程及其結果中要用 -1 代 i^2,故算術上及代數上的所有定律都可以推廣到複數上。特別是,拿複數的乘積 $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\cdots\cdot\mu$ 來說,當而且僅當其因子之一是零時,乘積才等於零。

最後我們注意,由公式(I)(II)(III)(IV)可得下面的重要推論。

若在複數的和、差、乘積及商中，把每個複數分別換成它的共軛數，則所得的前後兩個結果也是共軛的。這就是說，在複數的每個關係式中，如果只含四個算術運算，則恆可以用 $-i$ 置換 i。

§92. 複數的幾何表示法

我們知道，每一個實數都可用直線上的一點 M 表示；反過來說，我們又知道，直線上的每一點 M 都代表了某個實數 a，而該實數則稱為點 M 的橫坐標（圖 76）。點 M 的橫坐標是個抽象實數，表示了用單位長度所量得的有向線段 OM 的長，



圖 76.

同樣，每一個複數 $a+bi$ 可以用平面上一點 $M(a, b)$ 表示，該點的橫坐標及縱坐標各為實數 a 及 b；反過來說，平面上以實數 a 為橫坐標、以實數 b 為縱坐標的點 M，表示了一個複數 $a+bi$（圖 77）。

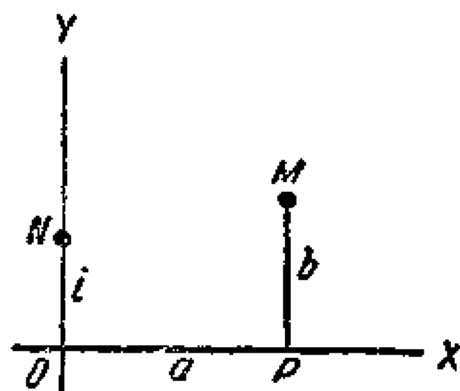


圖 77.

仿照着以前的說法，這複數 $a+bi$ 稱為點 M 的附着數。這樣，每一個複數 $a+bi$，都是平面 XOY 上唯一的、完全確定了的一點 M 的附着數；而平面 XOY 上的每一點 $M(a, b)$ 也都以複數 $a+bi$ 為它的附着數。

若點 M 位於水平的坐標軸 OX 上，那末這種點 M 的附着數是一個實數 a，因為在這種情形下 $b=0$。所以橫坐標軸 OX 稱為實數軸或簡稱實軸。同樣，當點 M 位於縱坐標軸 OY 上時，點 M 的附着數是一個純虛數 bi，因為在這種情形下 $a=0$。所以，縱坐標軸稱為虛數軸或簡

稱縱軸。縱坐標軸上離原點 O 爲單位長且在 O 上方的點 N，具有附着數 i。原點的附着數則爲零。

如果我們用直線段連接點 M 及原點 O，則得一矢量 OM，從點 O 朝向點 M（圖 78）。

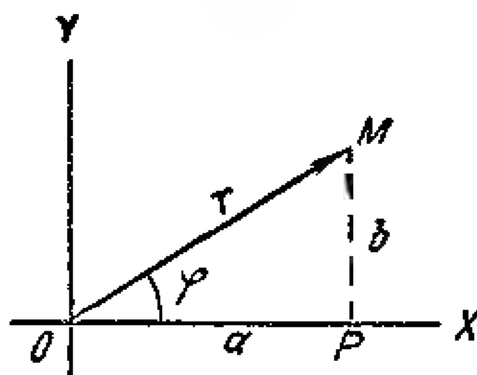


圖 78.

OM 這個矢量，跟它的端點 M 一樣，都很可以用來在幾何上表示複數 $a+bi$。

讀者可看到，實際上說，實數也是可以用兩種方法來表示的：用點 M（參閱圖 76）或用有向線段（也就是矢量）OM。假若實數 a 是正的，點 M 就在原點 O 的右邊，OX 軸上的矢量 OM 就具有 OX 軸的正方向；假若 a 是負數，則點 M 在原點 O 的左邊，矢量 OM 在 OX 軸上，但朝着該軸的負方向。

實數 a 的絕對值 $|a|$，是點 M 到點 O 的距離，無論何時總是算作正的，也就是，總是作爲矢量 OM 之長的。

在複數 $a+bi$ 的情形下，矢量 OM 已不在 OX 軸上而在平面上了。我們用 r 表示它的長，用 φ 表示它跟 OX 正軸的傾角。由直角三角形 OPM，我們得出大家都知道的、由直角坐標 a, b 變到極坐標 r, φ 的正變換公式：

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi \tag{6}$$

及其逆變換公式（即由極坐標變到直角坐標的公式）：

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\arctan\frac{b}{a}。 \tag{7}$$

由於函數 arc tan 是多值函數，故在求角 φ 時，應該有一個限制。角 φ 總是依正方向（反時針方向）來量的，就是說，依正的一段 OX 軸轉到矢量 OM 的位置來量的。若這個角是 φ，則當正的一段 OX 軸以反時針方向連續好幾次轉過矢量 OM 的位置時，φ 的其餘數值是 $\varphi+2\pi$，$\varphi+4\pi$ 等等；當正的一段 OX 軸以順時針方向連續好幾次轉過矢量

OM 的位置時，φ 的其餘數值是 $\varphi-2\pi$, $\varphi-4\pi$ 等等。角 φ 稱爲複數 $a+bi$ 的輻角。

至於矢量 OM 的長 r 的意義，那末從公式（7）的第一個式子就可以看出：它就是複數 $a+bi$ 的模；就是說，我們有

$$|a+bi|=r。\tag{8}$$

等式（8）值得注意，不僅是因爲：根據該等式，複數的模是實數絕對值概念的自然推廣；而且又因爲：從該等式，可推出關於模的一系列的定理。爲看出這點，首先我們來看看複數間的四種算術運算的幾何意義：

加法　按§91 公式(I)我們有：

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i。\tag{I}$$

在 XOY 平面上，作矢量 OM 及 OM'，來表示兩個複數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$；點 M 的坐標爲 a 及 b，又點 M' 的坐標爲 a' 及 b'（圖 79）。

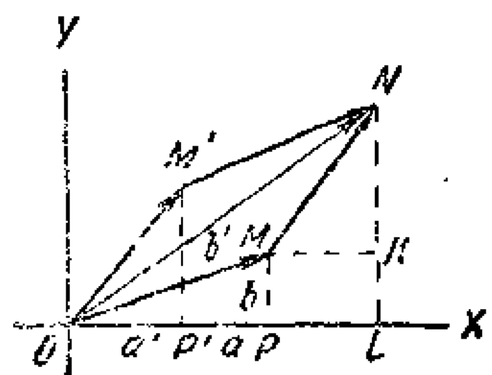


圖 79.

如果我們像力學中對待力那樣來對待矢量 OM 及 OM'，也就是，如果按照平行四邊形法則來把它們相加及相減，則在求矢量 OM 及 OM' 之和時，我們應在第一個矢量 OM 的端點連上一個矢量 MN，使 $MN=OM'$。這時，矢量 ON 就是矢量 OM 及 OM' 的幾何和。

顯然，$OP'=MK=ML$，$PM=LK$ 及 $P'M'=KN$。故 $OL=a+a'$ 及 $LN=b+b'$。隨之，結果所得的矢量 ON，也就是那以矢量 OM 及 OM' 爲邊所作平行四邊形的對角線，乃是二複數之和的幾何形象。

這樣，

當兩個複數 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 用兩個矢量來表示時，則求它們的和時，應該按平行四邊形法則求它們的幾何和，於是平行四邊形的對角線，就是那表示和數 $(a+bi)+(a'+b'i)$ 的矢量。

顯然,這個法則可以推廣到任意有限個複數的和

$$(a+bi)+(a'+b'i)+(a''+b''i)+(a'''+b'''i)$$

上去。

假若和的每一項都用矢量表示,依次在每個矢量的端點,連上後一個矢量的起點,像圖 80 中所示那樣,則在連上最後一個矢量 $a'''+b'''i$ 之後,就得到一點 S,其附着數卽爲所給各複數的和。事實上,最後所得矢量 OS 在 OX 軸上的射影,顯然是所給各矢量在 OX 軸上的射影的和 $a+a'+a''+a'''$;而 OS 在 OY 軸上的射影,是各矢量在 OY 軸上的射影的和 $b+b'+b''+b'''$。

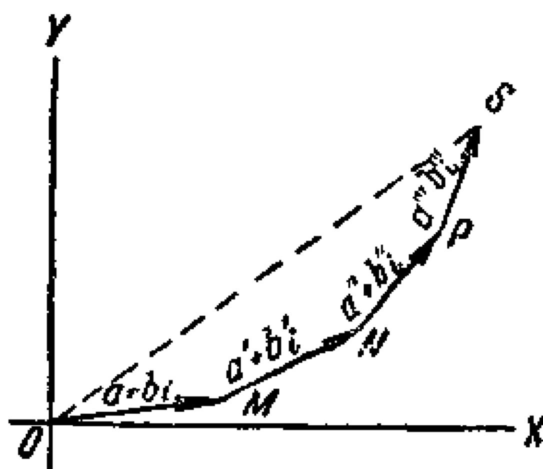


圖 80.

由於直線路徑 OS 顯然比直線線段 OM, MN, NP, PS 所組成的折線路徑爲短,故:

各複數之和的模,小於其模之和。

隨之,若所給複數爲 α, β, γ, δ, 則有不等式

$$|\alpha+\beta+\gamma+\delta|\leqslant|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|, \tag{9}$$

這裏,當而且僅當 α, β, γ, δ 這些矢量都在通過點 O 的同一直線上且朝同一方向時,等式才成立;因爲這時,線段 OS 等於 OM, MN, NP, PS 各線段之和。

公式(9)再一次指出了:複數 $a+bi$ 的模 $|a+bi|$ 跟實數 a 的絕對值 $|a|$ 是遵守同一規律的。

減法 設 $\alpha=a+bi$ 及 $\alpha'=a'+b'i$。按 §91 公式(II),我們有

$$\alpha-\alpha'=(a-a')+(b-b')i。$$

若複數 α 用矢量 OM 表示,又 α' 用矢量 OM' 表示,則點 M 的坐標爲 a, b; 點 M' 的坐標爲 a', b'(圖 81)。顯然, $P'P=a-a'$ 及

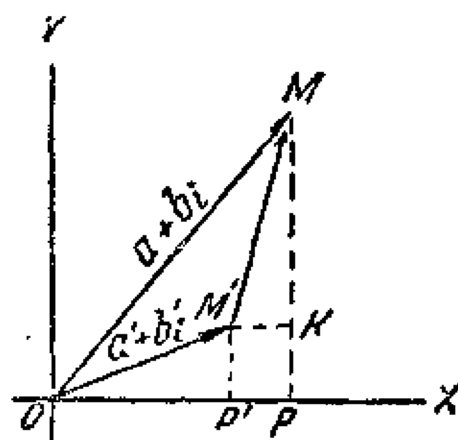


圖 81.

$KM=b-b'$。由此可知，連上去的矢量 $M'M$ 就是表示了複數 $(a-a')+(b-b')i$ 的那個矢量。

這樣，兩個複數 α 及 α' 的差，是用這樣一個矢量來表示的：這矢量的起點是 α' 在終點，它的終點是 α 的終點。

由於在三角形 $OM'M$ 中 MM' 的長比另外兩邊的差大，故知：

$$|\alpha-\alpha'|\geqslant|\alpha|-|\alpha'| \tag{10}$$

或

兩複數之差的模，不小於其模之差。

只有當矢量 α 及 α' 在過原點的同一直線上且方向相同時，等式才成立。

公式(10)跟兩個實數 a 及 a' 的絕對值 $|a|$ 與 $|a'|$ 間的公式

$$|a-a'|\geqslant|a|-|a'|$$

是相仿的。

爲討論其餘兩個運算：乘法及除法，必須先講複數的三角形式。

設複數 $\alpha=a+bi$ 的模是 r，輻角是 φ。由公式

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi \tag{6}$$

我們得到

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。 \tag{11}$$

這就是複數 α 的三角形式。

乘法 設

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ 及 } \alpha'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')。$$

作出乘積

$$\alpha\alpha'=rr'(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=$$

$$=rr'[(\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi')+i(\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\cos\varphi')]。$$

故

$$\alpha\alpha'=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]。\qquad(12)$$

從這個公式卽知：rr' 是乘積 $\alpha\alpha'$ 的模，$\varphi+\varphi'$ 是乘積的幅角。

這樣，我們得到結論：

兩複數 α 及 α' 的乘積的模，等於各數的模相乘：

$$|\alpha\alpha'|=|\alpha|\cdot|\alpha'|\qquad(13)$$

又

兩複數 α 及 α' 的乘積的幅角，等於各數的幅角相加：

$$\arg\alpha\alpha'=\arg\alpha+\arg\alpha',\qquad(14)$$

這裏，符號 $\arg(a+bi)$ 表示複數 $a+bi$ 的幅角，也就是，根據(7)的第二個公式，它等於 $\operatorname{arc}\tan\frac{b}{a}$。

公式(13)及(14)可推廣到三個、四個等等複數的乘積上去。事實上我們有：

$$|\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''|=|\alpha|\cdot|\alpha'\alpha''\alpha'''|=|\alpha|\cdot|\alpha'|\cdot|\alpha''\alpha'''|=$$
$$=|\alpha|\cdot|\alpha'|\cdot|\alpha''|\cdot|\alpha'''|$$

及

$$\arg(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''')=\arg\alpha+\arg(\alpha'\alpha''\alpha''')=\arg\alpha+\arg\alpha'+\arg(\alpha''\alpha''')=$$
$$=\arg\alpha+\arg\alpha'+\arg\alpha''+\arg\alpha'''。$$

特別是當所有的因子都相等時，我們有：

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n$$

及

$$\arg(\alpha^n)=n\arg\alpha。$$

故若 $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，則我們有所謂德馬佛公式

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)。\qquad(15)$$

公式(15)給出了複數的正整數次乘冪法則。

爲求複數 α 的方根 $\sqrt[n]{\alpha}$（這裏 n 是個正整數），我們寫出等式 $\beta=\sqrt[n]{\alpha}$，其中 $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 是所給的複數，$\beta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是所求的。取等式 $\beta=\sqrt[n]{\alpha}$ 兩邊的 n 次方，得到 $\beta^n=\alpha$。根據德馬佛

公式:

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。\tag{16}$$

方程(16)表達了寫爲三角形式的兩個複數的相等。因此,這兩個數的模應相等:

$$\rho^n=r,\tag{17}$$

而輻角只能相差 2π 的整數倍,即

$$n\theta-\varphi=2\pi k,\tag{18}$$

其中 k 是整數。

方程(17)及(18)給出了解:

$$\rho=\sqrt[n]{r}，\text{其中根號取正值，}\tag{19}$$

$$\theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k，\text{其中 } k \text{ 是整數。}\tag{20}$$

顯然,這裏的整數 k 共應取得下列數值:

$$k=0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

因爲此後得到的輻角 θ 跟前面的輻角相差只是 2π 的整數倍。

就幾何意義來說,對複數 α 作開 n 次方的運算 $\sqrt[n]{\alpha}$,相當於作一個中心在 O 而半徑爲 $\rho=\sqrt[n]{r}$ 的圓 C,並在圓周上作內接正 n 邊形的 n 個頂點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,這時第一個頂點 A_1 的輻角爲 $\frac{\varphi}{n}$,其餘的依次爲 $\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 1$, $\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 2$ 等等,直到最後的一個頂點 A_n(圖 82)。這 n 個頂點 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$,都是複數 α 的 n 個可能的 n 次方根 $\sqrt[n]{\alpha}$。平方根 $\sqrt{\alpha}$ 由兩邊形表示,故只有兩個數值。

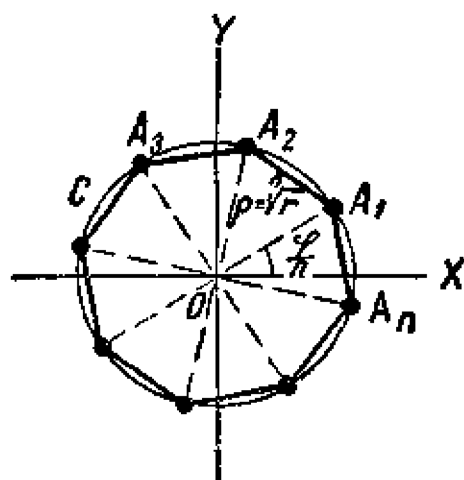


圖 82.

除法　寫爲三角形式的兩個複數 $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 及 $\alpha'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ 的商 $\frac{\alpha'}{\alpha}$,可以寫爲三角形式 $\beta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$。

因爲從等式 $\frac{\alpha'}{\alpha}=\beta$ 可得等式 $\alpha'=\alpha\beta$，故有

$$r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=r\rho[\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta)]。$$

由此得 $r'=r\rho$ 及 $\varphi'-\varphi-\theta=2\pi k$，其中 k 爲整數。

從這兩個方程解出 ρ 及 θ，最後求得

$$\rho=\frac{r'}{r}\quad 及\quad \theta=\varphi'-\varphi。$$

因此，我們得到結論：

兩個複數 α' 及 α 的商 $\frac{\alpha'}{\alpha}$ 的模，等於其模的商：

$$\left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|=\frac{|\alpha'|}{|\alpha|} \tag{21}$$

又

兩個複數 α' 及 α 的商 $\frac{\alpha'}{\alpha}$ 的幅角，等於其幅角的差：

$$\arg\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\arg\alpha'-\arg\alpha。 \tag{22}$$

讀者注意，複數的幅角 $\arg\alpha$, $\arg\alpha'$, …，性質跟對數一樣：複數相乘時它們的幅角相加，複數相除時它們的幅角相減。

§93．複變量

所謂複變量乃隨着時間的推移而改變其複數值的那種變量。通常用 z 表示複變量而寫爲

$$z=x+iy, \tag{1}$$

其中 x 及 y 是實變量。

複變量 z，在幾何上是用平面上一動點 M 表示的，這動點的附着數 $z=x+iy$ 隨着時間的推移而改變其數值；隨着這數值的改變，點 M 就改變位置，也就是，點 M 在平面上運動，畫出某條路徑（圖 83）。

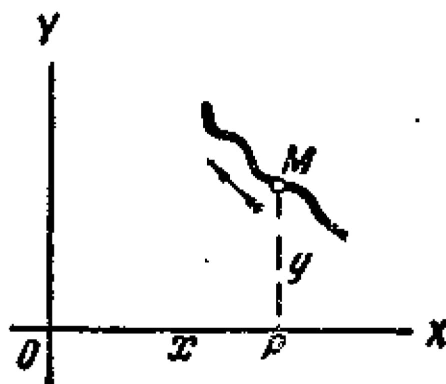


圖　83.

因爲，一方面，實變量的極限理論全都建立在下面的不等式上

$$|a-x|<\varepsilon, \qquad (2)$$

其中 a 爲變量 x 的極限；又因爲，另一方面，複數的模與實數的絕對值都遵守同樣的法則，故複變量的整個極限理論，可以完全像以前建立實變量的極限理論那樣建立起來。

而且，我們也不必再來建立這個理論了，因爲極限理論中所有的定理及法則，都可原封不動地搬到複變量的極限理論上來。

這樣，

若對於任意給定的正數 ε，可出現這樣一個瞬時，使從該瞬時起，以後一直滿足不等式：

$$|a-z|<\varepsilon。 \qquad (2^*)$$

那就說，複數 a 是複變量 z 的極限。

就幾何意義說，這表示：附着數爲複變量 z 的動點 M 在平面上移動，隨着時間的推移而這麼接近於附着數爲複數 a 的一個定點 A，使它在適當的瞬時就進入以 A 爲中心以 ε 爲半徑的圓 C 之內，而且從此以後，一直就留在這個圓裏，再也不出來了。作爲半徑的數 ε，可以事先取得任意的小(圖 84)。

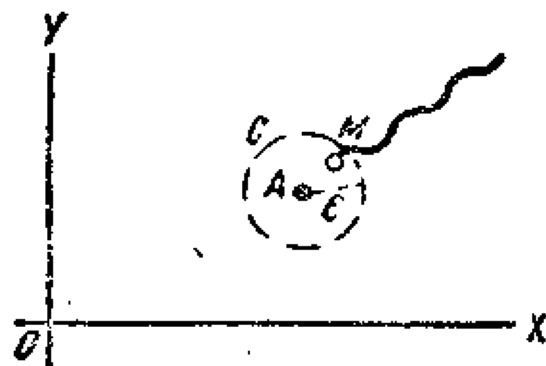


圖 84.

應該記住，點 A 到點 M 的距離 AM，本來不過是差數的模 $|a-z|$。

極限論中所有的定理，對複變量仍都成立；特別是，無窮小複變量 z 是作爲這麼一個變量來看的：對於它，從某瞬時起，恆滿足不等式

$$|z|<\varepsilon。 \qquad (3)$$

由此可知，若 z 爲一無窮小複變量，則以 z 爲附着數的動點 $M(z)$，會隨着時間的推移而這樣地接近於原點 O，以致於它將一直留在以原點 O 爲中心以 ε 爲半徑的圓 C 之內(圖 85)。

關於無窮大複變量,只要略講幾句話就夠。一複變量 z,若由某瞬時起滿足不等式

$$|z|>R, \qquad (4)$$

其中 R 爲預先選定的任意大的正數,則稱爲無窮大複變量。

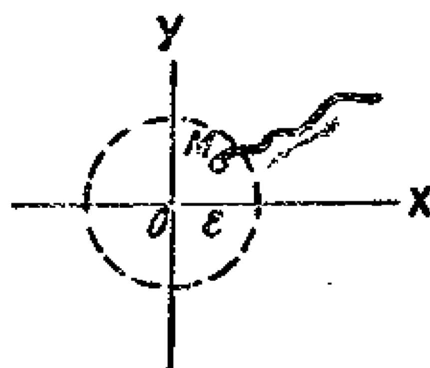


圖 85.

就幾何意義說,這表示:點 $M(z)$ 是這樣運動的,隨着時間的推移,它將一直在以 O 爲中心,以預先給定的任意大半徑爲半徑的圓 C 之外(圖 86)。

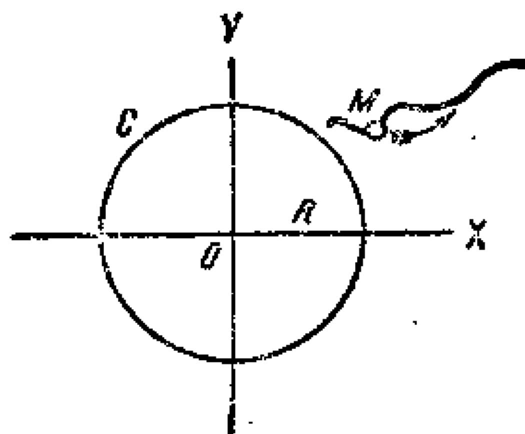


圖 86.

在實變量的情形下,我們把 $+\infty$ 與 $-\infty$ 區別開來;在複變量的情形下,這種區別是不必要的。若點 $M(z)$ 沿任意路徑跑向無窮遠,我們就寫

$$z\to\infty \text{ 或 } \lim z=\infty,$$

而不去問這是哪一種無窮大。所以,在複變量的情形下,所有的無窮大無匯合爲一個無窮遠點。因此,在複變量平面上,我們認爲只有一個無窮遠的點;沿着任何路徑無限遠離原點,都可以達到這一個無窮遠點。因此,在複變量的情形下,我們把 XOY 平面看作是半徑爲無窮大的球面;在通過原點的直徑上,球面上位於另一極端而跟原點遙遙相對的點,就是 ∞ 點。這種看法,由於有下面的一件事實,更加顯得合法,這就是,當 z 接近於原點 O 時,變量 $\frac{1}{z}$ 趨向於 ∞,就是說,我們有:

$$\text{當 } z\to 0 \text{ 時,}\quad \frac{1}{z}\to\infty。$$

這樣,在複變量的情形下,∞ 是當作一個點來看的;我們又認爲,若取變換 $z^*=\frac{1}{z}$,把點 z 變到點 z^*,則原點就變到無窮遠點;反過來也成立。

最後，我們要知道：等式 $\lim z=\alpha$，其中 $z=x+yi$，$\alpha=a+bi$，相當於兩個聯立的實數等式：$\lim x=a$，$\lim y=b$。

§94. 複數項級數的理論

實數項級數的理論只根據於極限，故可原封不動地搬到複數的情形上來。只不過這時應把幾何級數 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 的收斂區間 $-1<x<1$ 的說法，換成級數 $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ 的收斂圓 $|z|<1$ 的說法；這裏 z 是複數。在以 O 爲圓心以 1 爲半徑的圓內，這個級數是收斂的；在該圓外及圓周上，則處處都是發散的（圖 87）。

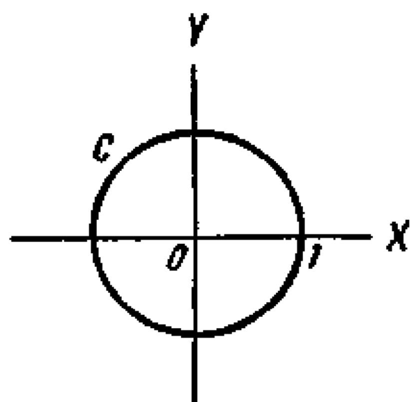


圖 87.

此外，對於複數項級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，達朗貝爾的檢驗法依然有效。若我們有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho$，則當 $\rho<1$ 時級數是收斂的；當 $\rho>1$ 時級數是發散的；而 $\rho=1$ 時不能決定。

最後，若複數項級數 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 中各項的模所成的級數 $|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$ 收斂，則原級數也收斂。這種級數，跟以前一樣，稱爲絕對收斂的級數；其性質也跟前面講過的一樣。

§95. 複變量函數的概念

若我們有兩個複變量 $w=u+iv$ 及 $z=x+iy$，它們之間又連繫着一個條件：當 z 不變時 w 也保持不變，當 z 變化時 w 也變化，則變量 w 稱爲因變量或稱爲 z 的函數，並寫爲

$$w=f(z)。\tag{1}$$

這時，變量 z 稱爲自變量。

通常，實變量函數 $y=f(x)$ 是給定在整個 OX 軸上，或一線段上，或一區間上的。相仿地，複變量函數 $w=f(z)$ 是給定在整個複變量平面

上,或在某條封閉曲線 C 之內且包括圍線,或僅在圍線 C 之內而不包括圍線本身的(圖 88)。

平常,我們總把這種閉線取得使它具有連續變化的切線(所謂"滑溜曲線"),或取它為有限個滑溜曲線弧所組成的圍線("曲線多邊形")。

在複變量的情形下,不能忽視下面這種重要的情況,這就是:我們在這時不能有函數 $w=f(z)$ 的整個幾何形象,而只能有這形象的個別部分。其原因在於:在實變量的情形下,函數 $y=f(x)$ 的整個幾何形象,是畫在平面 XOY 上的一條曲線 $y=f(x)$ (圖 89)。這曲線 $y=f(x)$ 是

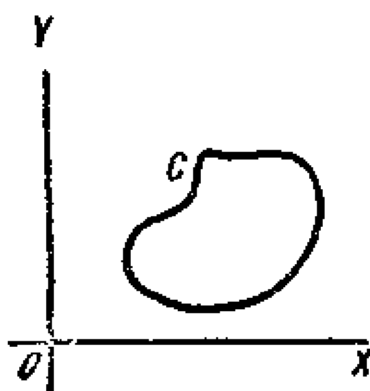


圖 88.

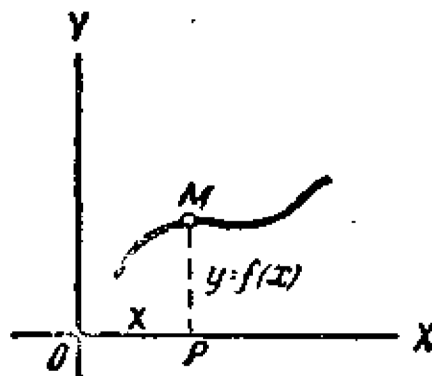


圖 89.

我們對於 OX 軸上及 OY 軸上兩個個別變化[當自變量 x 變化時,在 OX 軸上就有動點 $M(x)$ 的變化,而由於方程 $y=f(x)$ 的關係,因變量 y 應當也變化,故在 OY 軸上就有動點 $N(y)$ 的變化]觀念的綜合。把這兩根軸上的個別變化,在我們現成有的平面觀念裏綜合起來,就可以得到函數的整個形象為曲線(圖 89)。這曲線已經完全不依賴於時間了,並且完全刻劃了所給的函數 $y=f(x)$。



圖 90.

在複變量的情形下,雖然我們處理的仍是單獨一個函數 $w=f(z)$,但這裏一共有四個實變量,因為我們有 $w=u+iv$ 及 $z=x+iy$。因此,

要畫出複變量函數的幾何形象，我們必須有四根實軸 OX、OY、OU 及 OV，也就是，必須有一個四度空間。但是因爲我們對於這種空間沒有直接的體會，所以不能把上述四根軸綜合起來，因而不能得到複變量函數 $w=f(z)$ 的整個幾何形象。旣沒有整個的幾何形象，我們就只好滿足於兩個個別的平面 XOY 及 UOV；這時，在第一個平面上表示出自變量 z 的變化情形，而在第二個平面上則表示出因變量 w 的變化情形(圖 91)。

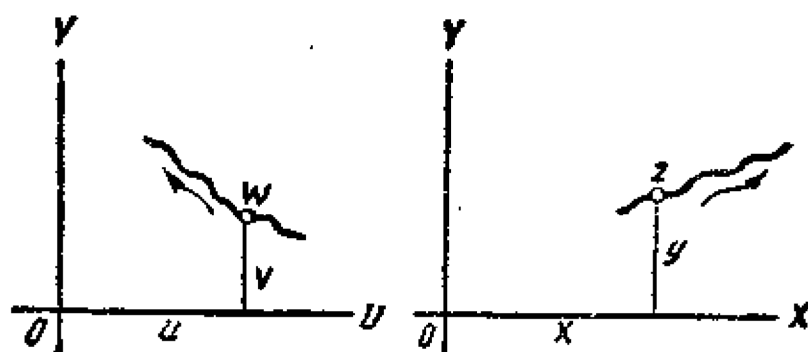


圖 91.

§96. 複變量函數的連續性

這個連續性的定義法，跟實變量的情形相同。函數 $w=f(z)$，如果滿足下述條件，則稱爲在 z_0 點連續，這個條件是：每當不等式

$$|z-z_0|<\eta \qquad (\mathrm{I})$$

成立時，函數 $f(z)$ 卽滿足不等式

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon, \qquad (\mathrm{II})$$

其中正數 ε 是任意給定的，而正數 η 是隨所給的 ε 適當定出的。

就幾何意義說，這表示：當自變量平面上的點 z 逗留在以 z_0 爲中心以 η 爲半徑的圓 C 內時，因變量平面上的點 w，$w=f(z)$，就逗留在以 $w_0\,[w_0=f(z_0)]$ 爲中心以 ε 爲半徑的圓 Γ 內(圖 92)。

函數 $w=f(z)$ 的增量 Δw，像以前一樣，由等式

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z), \qquad (1)$$

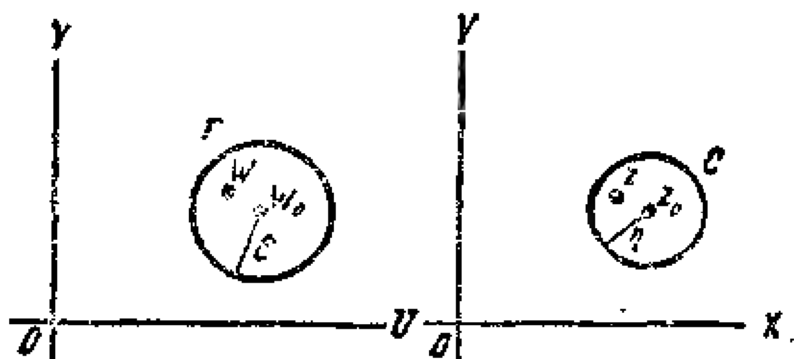


圖 92.

定出,其中 $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$ 是自變量 z 的增量,而 $\Delta w=\Delta u+i\,\Delta v$ 是函數的增量。

就幾何意義說,增量 Δz 是從點 z 到(附近的)點 $z+\Delta z$ 的矢量(圖93)。函數 $f(z)$ 在 z 點的連續性表示:當自變量 z 的增量 Δz 是無窮小時,函數的增量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 卽成爲無窮小;因不等式(I)可改寫爲:

$$|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon, \tag{I*}$$

而不等式(II)可改寫爲

$$|\Delta z|<\eta, \tag{II*}$$

這時我們用 z 表示初始點 z_0,用 $z+\Delta z$ 表示跟 z_0 相接近的點 z。

因此,所有關於連續性的定理,在複變量函數的情形下都仍然有效,特別是連續函數項級數的均勻收斂定理仍然成立:若級數 $u_1(z)+u_2(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots$ 由複變量 z 的函數所組成,且各函數在某個封

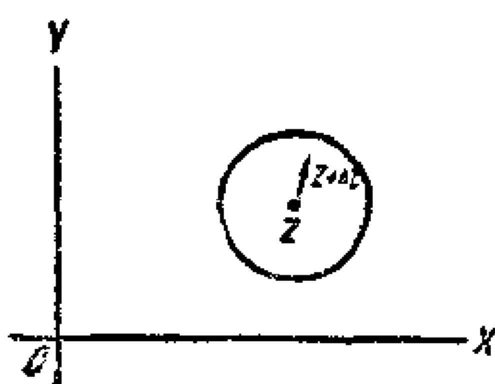


圖 93.

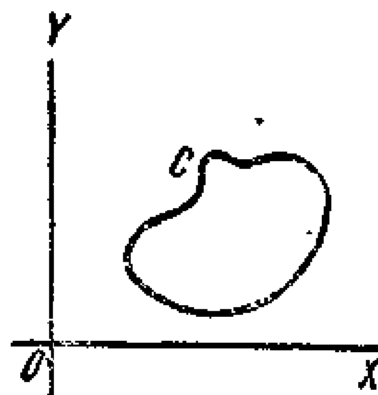


圖 94.

閉圍線 C 之內（包括圍線）連續（圖 94），又若該級數在 C 之內（包括圍線）是均勻收斂的，則該級數的和 $f(z)$ 是 C 內（包括圍線）的連續函數。

§97. 導數及解析性㊀

複變量函數的導數的定義，還是跟以前所講的一樣。

我們說，複變量 z 的函數 $w=f(z)$ 在點 z 處有導數，假若：當自變量的增量 Δz 趨近於零時，比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

趨近於完全確定的唯一極限，且該極限不依賴於 Δz 趨近於零時所沿的路徑。

當函數 $f(z)$ 在某點 z_0 處有導數時，我們說函數 $f(z)$ 在點 z_0 處是解析的；而導數仍用通常的記號 $f'(z)$ 來記。這樣，若所論函數在點 z 是解析的，我們就寫：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)。\tag{I}$$

顯然，在點 z 處解析的函數一定是在該點連續的；因爲當 $\Delta z\to 0$ 時，分子裏的函數增量 $f(z+\Delta z)-f(z)$ 一定是個無窮小。

凡在某封閉圍線 C 內每點處都是解析的那種函數，叫做解析於 C 內的函數。

§98. 複變量函數的微分法公式

所有關於函數的微分法的定理，尤其重要的是所有代數式的微分法公式（上册第八章 §62），搬到複變量函數上時都完全不變。特別是和、差、乘積、商、函數的函數以及反函數的導數公式仍然有效。跟以前

㊀ 譯者註：原書"解析性"一詞作"моногенность"，本應譯爲"單演"或"單源"性。這裏還是譯爲解析性，因爲在本書中，解析性與單源性兩個概念實質上是一致的（見 §99 中的一個註）。

一樣,常量的導數是零,自變量對於自身的導數等於1。

由此,立即可得下面幾個重要的推論:

1. 每個多項式 $P(z)$, $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, 是在 z 平面上每一有限點處解析的函數。

2. 每個有理函數 $\frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad Q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m,$$

都是處處解析的,但在方程 $Q(z)=0$ 的根處除外,在這些點處函數可能不是解析的。

3. 由方程 $P(z, w)=0$ 所定出的每個代數函數 $w(z)$, 除了在有限個點處以外,是處處解析的。這裏 $P(z, w)$ 是 z 及 w 的多項式。

這樣, z 的解析函數是有無窮多個的,但它們都是代數函數。爲討論超越解析函數,必須討論冪級數。

§99. 冪級數

冪級數

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{1}$$

的係數,一般說來是複數,而 z 又是複變量。

對於以複變量 z 爲自變量的冪級數來說,亞培爾定理的證明完全跟 §80 中一樣。所以這定理現在可敍述如下:

若冪級數(1)在某點 z_0 處收斂,則在以點 O 爲中心以 $|z_0|-\varepsilon$ 爲半徑的任何圓內,由於高界級數收斂,該冪級數也是收斂的,這裏 ε 是任意小的定數。若冪級數(1)在點 z_0 處發散,則在圓 $|z|\leqslant z_0$ 以外的所有點處,它將是發散的,因爲它的一般項在該圓外不可能趨近於零(圖 95)。

從這個定理可得下面的推論:

對於每一個冪級數(1),都有一個以點 O 爲中心以 ρ 爲半徑的圓

C，使冪級數在該圓內處處收斂，而在圓外處處發散。

這個圓 C 稱爲冪級數（1）的收斂圓。

在收斂圓的圓周 C 上，級數的收斂與發散是不定的，因爲該圓周上可能有收斂點，也可能有發散點。

冪級數（1），在一個與 C 同心、但半徑 ρ^* 小於收斂圓 C 的半徑 ρ（圖 96）、的圓 C^* 內及在其圓周上，是均勻收斂的，從這個事實可知：冪級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \qquad (2)$$

的和 $f(z)$，是收斂圓 C 內的連續函數。

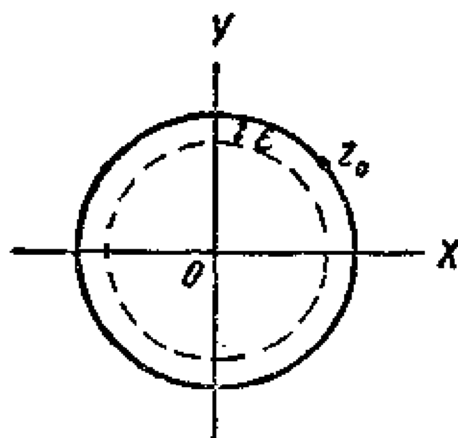


圖 95.

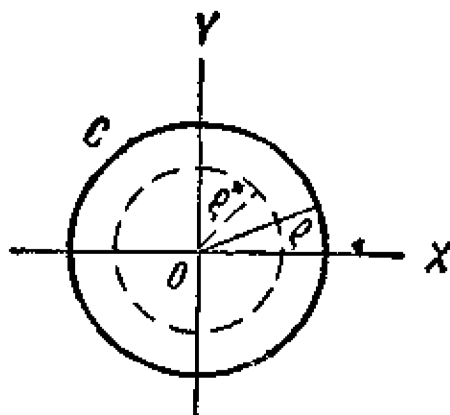


圖 96.

但更加重要得多的，是柯西第一（正）定理：冪級數的和 $f(z)$，是在其收斂圓 C 內處處解析的函數。

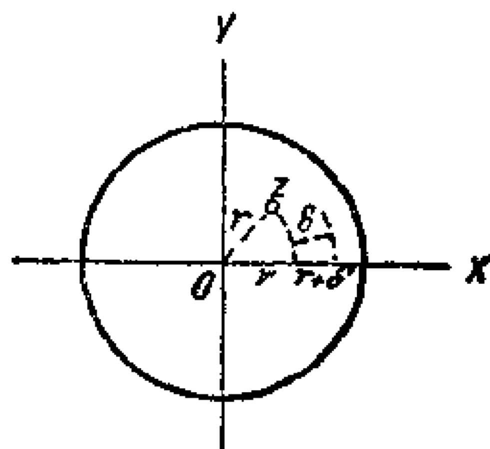


圖 97.

證明 設冪級數（2）的收斂圓的半徑是 ρ，$\rho>0$。這級數（2）的收斂圓 C 以 O 爲中心以 ρ 爲半徑（圖 97）。設 z 是該圓內任何一個定點。於是，我們顯然有 $|z|<\rho$。用 r 表示複數 z 的模，$r=|z|$，我們有 $r<\rho$。因此，對於 r，可加上一個足夠小的正數 δ，$\delta>0$，使我們仍有不等式 $r+\delta<\rho$。由於點 r 及點 $r+\delta$ 都

在收斂圓 C 內,故下面兩個正項級數是收斂的。

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n \quad 及 \quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot(r+\delta)^n。$$

從第二個級數減去第一個級數,得一正項收斂級數:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot\frac{(r+\delta)^n-r^n}{1}。$$

用所取的固定正數 δ 除,仍得一正項級數:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot\frac{(r+\delta)^n-r^n}{\delta},$$

它可以改寫爲

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot\left\{nr^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}r^{n-2}\delta+\cdots+\delta^{n-1}\right\}。\tag{3}$$

假若現在寫出表達式 $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$,那它就可以寫爲收斂級數的形式

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z},$$

這個式子又可改寫爲

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right\}。\tag{4}$$

比較級數(3)及(4),我們看到,由於等式 $|z|=r$ 的關係,當趨近於零的 Δz 滿足不等式 $|\Delta z|<\delta$ 時,在 z 固定及 Δz 趨近於零的情況下,級數(4)是正規收斂的。事實上,當 $|\Delta z|<\delta$ 時,級數(4)以常數項的正項級數(3)爲其高界級數。因此,當 $\Delta z\to 0$ 時,級數(4)是均勻收斂的並且表示了增量 Δz 的一個連續函數;這連續函數在 $\Delta z\to 0$ 時的極限值是收斂級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot z^{n-1}。$$

因此，若令 Δz 沿任意路徑趨近於零，我們看到，級數（4）的和——也就是比值 $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ ——趨於一個完全確定的極限，這就是絕對收斂級數 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 的和。隨之，$f(z)$ 是在點 z 處解析的函數，於是我們有等式

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}, \tag{5}$$

這個等式說明冪級數在其收斂圓內是解析的，又說明冪級數在其收斂圓內是可以逐項微分的。（證明完畢）

這個重要的柯西定理，是形成無窮多個層出不窮的新解析函數的來源❶。但更重要的是**柯西第二（逆）定理**，它的重要意義在於：用這個方法可以得到所有的解析函數，一個都不漏掉。

這個頂頂重要的定理，可嚴密地敍述如下：

柯西第二（逆）定理 在半徑爲 R 中心爲 $z=0$ 的圓 Γ 內每一點 z 處都有解析性的每個函數 $f(z)$，是在圓 Γ 內已知爲收斂的一個冪級數 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$ 之和（圖 98）。

這個定理是數學分析中最重要的定理之一，它的推論之多是數不淸的。但是，這定理的證明，現在還沒有簡化到使我們能在這本書裏來講它的那種地步，因此我們只能限於證明它的一些直接推論。

推論 1. 在中心爲 $z=a$ 半徑爲 R 的圓 Γ 內解析的一類函數 $f(z)$，跟在該圓內可展爲收斂冪級數

$$b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots$$

的一類函數，是同一類的函數。

❶ 得到解析函數並不是像初看起來那麼簡單的一回事。我們作出任一個函數 $f(z)$ 時，如果不用對自變量 z 的直接運算方法，而用特別條款或默契［正如同在定義實變量函數 $f(x)$ 時所常做的那樣］，那末所作出的函數多半是非解析的函數。例如，變量 $w=x-iy$ 顯然是複變量 $z=x+iy$ 的連續函數，但它在任何點 z 處都不是解析的。爲得出解析函數，應當使函數滿足許多條件。正因爲如此，柯西第一（正）定理才有這樣的重要性，它是得出解析函數（而且只是解析函數）的可靠方法。

證明　冪級數

$$b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots \quad (6)$$

經過變換 $z-a=\zeta$(圖 99)之後,可寫爲下面的形式

$$b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots, \quad (7)$$

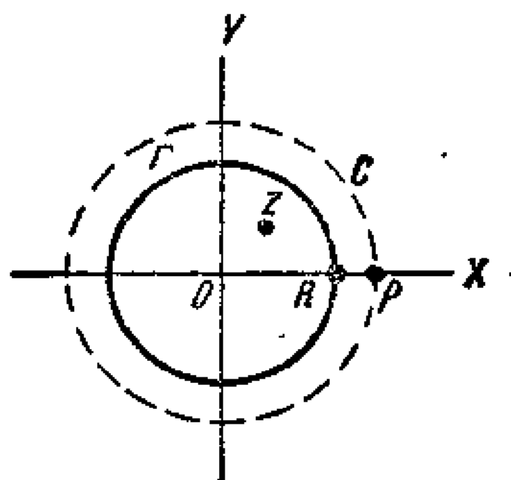


圖 98.

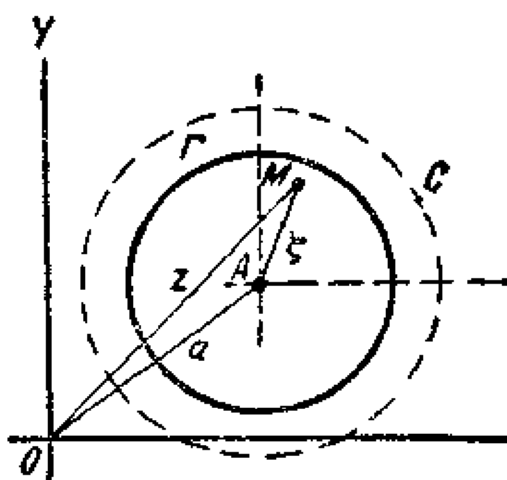


圖 99.

$z-a=\zeta$ 這個變換公式表示:變矢量 OM 是常矢量 OA 及變矢量 AM 的和;這裏點 M 的附着數是 z,點 A 的附着數是固定的複數 a。因此,新的複變量 ζ 是由矢量 AM 來表示的。因爲冪級數(7)具有一定的收斂圓 C(半徑爲 ρ 中心爲 A),故原來的冪級數(6)在圓 C 內收斂而在 C 外發散。半徑 ρ 則是級數(6)的收斂半徑。

根據柯西第一(正)定理,冪級數(7)的和 $\Phi(\zeta)$

$$\Phi(\zeta)=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots \quad (7^*)$$

對於 ζ 來說,是在收斂圓 C 內解析的函數,因它具有對於 ζ 的複導數 $\Phi'(\zeta)=\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}$。再變換到原來的複變量,$\zeta=(z-a)$,我們得到複變量 z 的函數 $f(z)=\Phi(z-a)$,它是冪級數(6)在收斂圓 C 之內的和:

$$f(z)=\Phi(z-a)=$$

$$=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots \quad (6^*)$$

又,根據關於函數的函數的微分法定理,我們有

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}=\Phi'(\zeta)\cdot 1=\Phi'(\zeta)=\Phi'(z-a),$$

由此可知，在收斂圓 C 內 $f(z)$ 是 z 的解析函數。

這樣，我們就證明了正命題，這就是：若函數 $f(z)$ 是冪級數(6)在其收斂圓 C 內的和，則在該圓 C 內 $f(z)$ 是 z 的解析函數。

現在我們要證明逆命題：若用某種方法給出的函數 $f(z)$，在以 $z=a$ 為中心以 R 為半徑的某個圓 Γ 內，原是 z 的解析函數，那末這種函數一定可作為像(6)那樣的一個冪級數之和，這級數在圓 Γ 內一定收斂，而且在該圓外也可能收斂，也就是，這級數也可能在較大半徑 $\rho(\rho>R)$ 的圓內收斂。

事實上，若 $f(z)$ 在 Γ 內是 z 的解析函數，則設 $z=a+\zeta$ 後，便得到在 $\zeta=0$ 為中心 R 為半徑的圓內為解析的函數 $f(a+\zeta)$。於是，應用柯西第二(逆)定理，我們就可以看出 $f(\zeta+a)$ 是一個冪級數(7)的和

$$b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots \tag{7}$$

這冪級數在以 $\zeta=0$ 為中心以 R 為半徑的圓內一定是收斂的。因此我們有等式

$$f(a+\zeta)=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots \tag{7**}$$

用 $\zeta=z-a$ 代入後，得到

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots \tag{6*}$$

這就是所要證明的。

我們要知道，級數(6*)的收斂圓 C 並不一定要跟圓 Γ 相同，它可能比 Γ 大得多。

註　在冪級數　$b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots$ 的收斂圓內為該冪級數之和的函數，叫做解析函數(аналитическая функция)。於是推論1告訴我們：在某個圓內的 моногенная функция (單演函數，本書內譯作解析函數)跟 аналитическая функция (廣義的解析函數)這兩個概念是一致的 ⊖。

⊖ 譯者註：凡在一點處可微分的函數叫做 моногенная функция，凡在一點及其鄰域內可微分的函數叫做 аналитическая функция (例如 Привалов 的複變函數引論中就是這樣說的)。但有的作者根本就不用 моногенная функция 這一詞，而只說"在一點處的解析函數"以及"在一個區域上的解析函數"。

推論 2. 在任何封閉圍線 K 內解析的函數，是在 K 內處處可微分無窮次的。

證明 在柯西第一(正)定理中已經證明：在以 ρ 爲半徑以 $z=0$ 爲中心的收斂圓 C 內的每一個冪級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

它的和 $f(z)$ 是在 C 內解析的，而且 $f(z)$ 的導數 $f'(z)$ 等於原級數逐項微分後的和，也就是，我們有等式

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots \quad (8)$$

這樣，微分後所得的級數(8)在 C 圓內一定是收斂的，且其和爲 $f'(z)$。又由於級數(8)也是一個冪級數，且在 C 圓內收斂，故剛才所講的種種論證對於這個級數也完全適用。這就表示一階導數 $f'(z)$ 也是在 C 內解析的函數，它的導數 $f''(z)$ 可以從級數(8)逐項微分而得：

$$f''(z)=2a_2+3\cdot 2a_3z+\cdots+n(n-1)a_nz^{n-2}+\cdots, \quad (9)$$

而且這個級數也是在 C 圓內一定收斂的。

再把上面的論證重複一次，我們就知道 $f''(z)$ 也是在 C 內解析的，它的導數 $f'''(z)$ 可以從級數(9)逐項微分而得：

$$f'''(z)=1\cdot 2\cdot 3a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nz^{n-3}+\cdots, \quad (10)$$

而且這個冪級數在 C 圓內又是收斂的。這樣可以一直無限做下去。

因此，冪級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

的和 $f(z)$，在其收斂圓內是可以微分無窮次的。

由此立即可知，形式更一般的冪級數

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots \quad (11)$$

在其收斂圓 C 內也是可微分無窮次的，因爲我們可用置換 $z=a+\zeta$ 把(11)變換爲

$$f(a+\zeta)=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots,$$

而這個式子表明：在收斂圓 C 內，函數 $f(a+\zeta)$ 是對 ζ 可微分無窮次的。

又由於我們顯然有

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{df(a+\zeta)}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}=\frac{df(z+\zeta)}{d\zeta},$$

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=\frac{d^2f(a+\zeta)}{d\zeta^2},\quad \frac{d^3f(z)}{dz^3}=\frac{d^3f(a+\zeta)}{d\zeta^3},\ \cdots$$

等等,故可展成冪級數的函數 $f(z)$,在其冪級數(11)的收斂圓 C 之內,是對 z 可微分無窮次的。

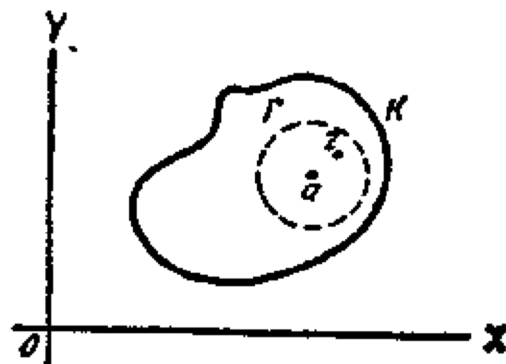


圖 100.

現在設 $f(z)$ 在某封閉圍線 K 之內是解析函數。設 z 是 K 內的某一點。這個點總可用一個全部在 K 內且中心在定點 a 處的圓 Γ (圖 100) 來遮蓋。由於 $f(z)$ 在圓 Γ 內是解析的,故它在 Γ 內可展成冪級數;這就說明它在 z 點具有任何階的導數 $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, $\cdots$。而這就證明了所給函數 $f(z)$ 在 z 點是可微分無窮次的。

§100. 台勞級數及其收斂圓

假若有冪級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \qquad (1)$$

在以 $z=0$ 爲中心以 R 爲半徑的圓 Γ 內是收斂的,則從等式(1)及上節中的(8),(9),(10)可知

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=1\cdot a_1,\ f''(0)=1\cdot 2\cdot a_2,\ f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3,\ \cdots$$

一般說來

$$f^{(n)}(0)=n!a_n。$$

從這個等式即得馬克勞林公式:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (2)$$

所以,冪級數(1)是馬克勞林級數:

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z_n+\cdots, \quad (1)$$

於是,

在以O爲中心以R爲半徑的圓Γ內解析的函數$f(z)$,是以唯一方式展開爲冪級數的,因爲所展冪級數的係數是按馬克勞林公式定出的,也就是說,是單單由$z=0$這一點處的函數$f(z)$及$f'(z)$,$f''(z)$,…等等導數的數值來決定的。這個馬克勞林級數在圓Γ內一定收斂,而且可能在半徑還要大一些的同心圓內也收斂。

現在我們在那以$z=a$爲中心以R爲半徑的圓Γ內,取一個在該圓內解析的函數$f(z)$。我們已經知道,這種函數$f(z)$可展開爲在該圓Γ內必定收斂且形式更一般的冪級數:

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots, \quad (3)$$

按公式$z=a+\zeta$置換變量z,我們把一般形式的冪級數(3)變爲尋常的冪級數:

$$\Phi(\zeta)=f(a+\zeta)=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots \quad (4)$$

這級數在以$\zeta=0$爲中心以R爲半徑的圓內是收斂的,而且我們已經知道它就是函數$\Phi(\zeta)$的馬克勞林級數。這表示,(4)中的係數b_0, b_1, b_2,…是按馬克勞林公式來定出的:

$$b_0=\Phi(0),\ b_1=\frac{\Phi'(0)}{1!},\ b_2=\frac{\Phi''(0)}{2!},\ \cdots,\ b_n=\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!},\ \cdots$$

但因我們顯然有

$$\Phi'(\zeta)=f'(a+\zeta)=f'(z),\ \Phi''(\zeta)=f''(z),\cdots,\ \Phi^{(n)}(\zeta)=f^{(n)}(z),\cdots,$$

故若設$\zeta=0$,我們就有$z=a$及

$$\Phi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)。\quad (5)$$

因此,我們有那用來定出係數b_n的台勞公式

$$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

所以,一般形式的冪級數(3),原來就是那在Γ圓(中心爲a半徑爲R)

內一定收斂為在該 Γ 圓內解析的所給函數 $f(z)$ 的台勞級數

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots, \qquad (II)$$

現在要問：台勞級數(II)的收斂圓 C 是怎麼樣的？

若所給函數 $f(z)$ 在封閉圍線 K 內處處是解析的，則 Γ 圓可能擴大，一直擴大到那仍在圍線 K 內但已從內部跟 K 相切的圓 Γ' 那麼大(圖 101)。台勞級數(II)在這種圓 Γ' 內的收斂性，是由我們對函數 $f(z)$ 在 Γ' 內所假定的解析性來保證的。假若函數 $f(z)$ 不能再解析擴張到跟 Γ' 最接近的那部分圍線 K 之外，那末圓 Γ' 就不可能再擴大下去了。但收斂圓 C 往往總是大於圓 Γ' 的(圖 101)。在這種情形下，那早先只限於在圍線 K 內討論的函數 $f(z)$ 就可以這樣來解析擴張，使函數 $f(z)$ 在圍線 K 內的原有部分，跟該函數定義在收斂圓 C 突出於 K 外區域上的新添部分，就解析性意義上說，形成了那由台勞級數(II)在其收斂圓 C 內的和所給出的整個函數。

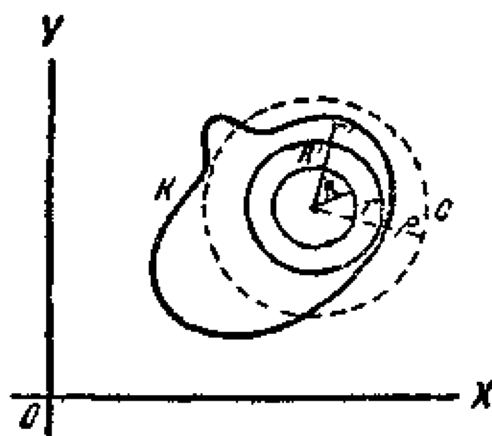


圖　101.

台勞級數在其收斂圓 C 外是發散的，這個事實指出：在該圓的圓周上存在着一些點，以致於我們不能把所論函數 $f(z)$ 解析擴張到這些點之外。這種點稱為解析函數 $f(z)$ 的奇異點。

解析函數 $f(z)$，常常可以從它所給出的情形一看就知道它有哪些奇異點。這時定起台勞級數的收斂半徑 ρ 來就很簡單：只要找出跟 $z=a$ 點相距最近的一個奇異點，通過這一點作一個以 $z=a$ 為中心的圓 C。這個圓 C 就是所給函數 $f(z)$ 在 $z=a$ 點所展開的台勞級數的收斂圓。

這就是有名的複變量函數原理,有了這個原理,我們今後就毋需再研究台勞級數的餘項了(參閱 §84)。

例　實變量函數 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 OX 軸上可微分無窮次,但麼開爲馬克勞林級數

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

只在區間 $(-1,+1)$ 內是收斂的。說明其眞正的理由。

解　從實變量觀點來看,這是不可能理解的,因爲函數 $\frac{1}{1+x^2}$ 在整個 OX 軸上是可微分無窮次的。但從複變量函數的觀點來解釋收斂區間 $(-1,+1)$,是極其容易的事。因爲複變量函數 $\frac{1}{1+z^2}$ 只在那使分母爲零的兩個點處(即是使 $1+z^2=0$ 的兩個點處)不是解析的。這兩個點是 $z_1=+i$ 及 $z_2=-i$。在這兩個點處函數變爲無窮大。但在其他所有點處函數是解析的。因此,那給出了函數 $\frac{1}{1+z^2}$ 的馬克勞林展開式 $1-z^2+z^4-z^6+z^8-\cdots$,是以過奇異點 $+i$ 及 $-i$ 的圓 C 爲其收斂圓的。如果我們把這函數在實數軸上任意一點 a 展開,則得到一個在 C^* 圓內收斂的台勞級數,這裏 C^* 圓是以 ρ 爲半徑且通過奇異點 $+i$ 及 $-i$ 的(圖 102)。所以 $\rho=\sqrt{1+a^2}$,因而這個台勞級數(在實變量情形下)的收斂區間是 $(a-\sqrt{1+a^2}, a+\sqrt{1+a^2})$。這件事只有用複變量函數的理論才能看得出來。

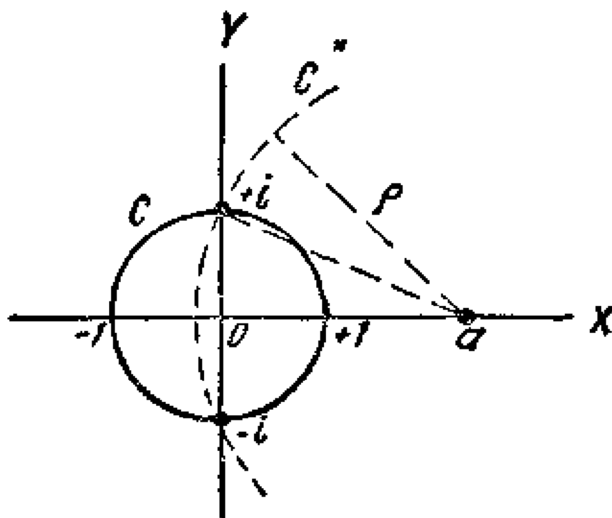


圖　102.

§101.　複變量指數函數與三角函數

假若複變量函數 $f(z)$ 可展爲對每個實數與複數 z 都收斂的冪級數:

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \qquad (1)$$

那末這種函數 $f(z)$ 叫做整函數。整函數在全部平面上都是解析的。整函數的最簡單的例子,是只含有限個 z 的乘冪的多項式 $P(z)$,因爲其他各高次項的係數都是零。

但除多項式外還有其他的整函數,它們的冪級數是含有係數異於零的無窮多項的。這種函數稱爲超越整函數。

這種超越整函數我們已經見過三個(見 §84)。因爲我們以前只就實變量討論過的下列三個展開式

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \tag{2}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, \tag{3}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, \tag{4}$$

是對一切實數 x 都收斂的。所以,用字母 z 代替字母 x 後,這些級數對於所有的複數值 z 也都應當是收斂的。事實上,要是這些級數中有某個級數在某個複數值 z_0 處是發散的,那末該級數在半徑爲 $|z_0|$ 的圓外一定是發散的,因而它就不能在全部實數軸 OX 上收斂了。

所以,級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad 及\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

對於每個複數 z 都是收斂的,因而它們是某三個超越整函數的展開式。這三個超越整函數,我們仍照以前一樣,分別用記號 e^z, $\sin z$ 及 $\cos z$ 來表示。

這樣,我們寫出

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}。\tag{5}$$

指數函數及三角函數的所有性質,都可從這幾個等式推出來。例如,逐項微分的結果,我們立即得到像實變量時那樣的公式:

$$\frac{de^z}{dz}=e^z,\quad \frac{d\sin z}{dz}=\cos z,\quad \frac{d\cos z}{dz}=-\sin z。\tag{6}$$

此外,當 z^* 固定時,函數 e^{z+z^*} 是處處對 z 解析的函數。微分後,得:

$$\frac{de^{z+z^*}}{dz}=\frac{de^{z+z^*}}{d(z+z^*)}\cdot\frac{d(z+z^*)}{dz}=e^{z+z^*}\cdot 1=e^{z+z^*}$$

所以,函數 e^{z+z^*} 對 z 微分時是不變的,因而一般有

$$\frac{d^n(e^{z+z^*})}{dz^n}=e^{z+z^*}。$$

把 e^{z+z^*} 展為馬克勞林級數,我們有

$$e^{z+z^*}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\dfrac{d^n(e^{z+z^*})}{dz^n}\right]_{z=0}}{n!}\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[e^{z+z^*}]_{z=0}}{n!}\cdot z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{z^*}}{n!}z^n=e^{z^*}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^{z^*}\cdot e^z=e^z\cdot e^{z^*}。$$

這樣,我們就得出函數 e^z 的基本性質如下

$$e^{z+z^*}=e^z\cdot e^{z^*},\tag{7}$$

其中 z 及 z^* 是兩個任意的複數。

從等式(5)我們直接得到

$$\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z,\tag{8}$$

$$e^{zi}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-zi}=\cos z-i\sin z。\tag{9}$$

由此,將(9)中的等式相加及相減,我們就得到那由歐拉首先發現的一個頂頂基本的公式:

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\quad 及\quad \sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}。\tag{10}$$

最後,若設 $z=x+iy$,其中 x 及 y 為實變量,則有:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)。\tag{11}$$

從這個公式可知:表達式 e^z 的模等於 e^x,而它的幅角就是 y:

$$|e^z|=e^x,\quad \arg e^z=y。$$

由於無論 x 是什麼實數值 e^x 都不會等於零,故函數 e^z 處處不等於零。

我們注意:由(9)可知 $e^{2\pi i}=1$。

因此

$$e^z=e^z\cdot 1=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^{z+2\pi i}。$$

所以指數函數 e^z 是個週期函數,其週期為純虛數 $2\pi i$。

§102. 雙曲函數

平常的三角函數：正弦、餘弦、正切，各是對圓 $x^2+y^2=1$ 所作的三條直線線段：PM, OP 及 AQ（圖 103）。這時角 φ 不僅可用 AM 弧來度量，而且也可用圓扇形面積 AOM 的兩倍來度量。因此，設 $2\times AOM$ 的面積 $=\varphi$，則有 $PM=\sin\varphi$, $OP=\cos\varphi$, $AQ=\tan\varphi$。

同樣，若不取圓 $x^2+y^2=1$ 而取等邊雙曲線 $x^2-y^2=1$，這對於雙曲線也可作這種直線線段 PM, OP 及 AQ（圖 104），猶如前面對圓所作的一樣。我們可以把它們分別稱爲雙曲正弦、雙曲餘弦及雙曲正切。這時，我們取雙曲扇形面積 AOM 的兩倍爲自變量，用 φ 來記，並寫 $PM=\operatorname{sh}\varphi$, $OP=\operatorname{ch}\varphi$ 及 $AQ=\operatorname{th}\varphi$。

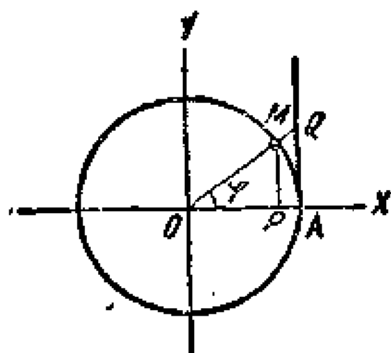


圖 103.

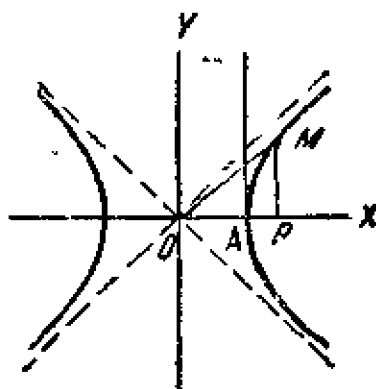


圖 104.

我們的目的在於求出 $\operatorname{sh}\varphi$ 及 $\operatorname{ch}\varphi$ 的級數，並利用虛數來建立它們與三角函數及指數函數之間的關係。

用字母 x 及 y 表示 M 點的坐標，我們可以寫出等式

$$\text{面積 } AOM=\text{面積 } POM-\text{面積 } PAM。$$

$$\text{但面積 } POM=\frac{1}{2}OP\cdot PM=\frac{xy}{2}=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

面積 $PAM=\int_1^x y\,dx=\int_1^x\sqrt{t^2-1}\,dt$，因爲從雙曲線方程 $x^2-y^2=1$ 可知 $y=\sqrt{x^2-1}$，同時爲避免混淆起見，這裏應當用另一個字母如 t 來代替表示積分變量的字母 x。

因此：

$$\text{面積 } AOM = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt。\qquad (1)$$

現在翻一下基本積分表中的公式 XXI (§8)，我們看到，不定積分可以積出來：

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C。$$

因此，定積分等於：

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]_1^x =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})。\qquad (2)$$

將所得定積分值代入公式(1)，得

$$\text{面積 } AOM = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})。$$

也就是

$$2\text{ 面積 } AOM = \varphi = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \ln(x+y)。\qquad (3)$$

由此可知

$$-\varphi = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \ln(x-\sqrt{x^2-1}) = \ln(x-y)。$$

因此　$$x+y=e^{\varphi} \quad \text{及} \quad x-y=e^{-\varphi}。$$

相加及相減，得

$$x = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \quad \text{及} \quad y = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}。$$

由於 $OP=\operatorname{ch}\varphi$ 及 $PM=\operatorname{sh}\varphi$，故最後得

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}。\qquad (4)$$

至於線段 AQ，則可以從比例式 $\frac{AQ}{OA}=\frac{PM}{OP}$ 定出來。因 $OA=1$，$AQ=\operatorname{th}\varphi$，故有

$$\operatorname{th}\varphi=\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}。\tag{5}$$

所得到的公式(4)及(5),在變量 φ 的實數值處,用指數函數表達了雙曲函數 $\operatorname{sh}\varphi$, $\operatorname{ch}\varphi$ 及 $\operatorname{th}\varphi$。

讓公式(4)及(5)對於變量的一切數值,實數值和複數值,都仍然保持不變,我們就應該寫出

$$\operatorname{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th}z=\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}。\tag{6}$$

假若我們現在用歐拉公式[§101, (10)],便立即可知:

$$\operatorname{sh}z=\frac{\sin iz}{i},\quad \operatorname{ch}z=\cos iz,\quad \operatorname{th}z=\frac{\tan iz}{i}。\tag{7}$$

因此我們可以說,雙曲餘弦 $\operatorname{ch}z$ 在實軸上的數值,不過是尋常的三角餘弦在虛軸上的數值;而雙曲正弦及雙曲正切在實軸上的數值,就是尋常三角正弦及三角正切在虛軸上的數值再用 i 除。

有了那用尋常三角函數來表示雙曲函數的公式(7),我們就可以反過來用雙曲函數來表示尋常的三角函數。這樣就可把尋常三角函數之間的每一個關係轉變為雙曲函數之間的關係,所以這是很重要的一件事。把 $\cos z$ 換成 $\operatorname{ch}z$ 又把 $\operatorname{sh}z$ 換成 $i\operatorname{sh}z$ 後,每個三角公式都可轉變為雙曲函數的公式。

這樣,如同關係式 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ 可轉變為

$$\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z=1。\tag{8}$$

加法公式

$$\sin(z+z^*)=\sin z\cos z^*+\cos z\sin z^*$$

及

$$\cos(z+z^*)=\cos z\cos z^*-\sin z\sin z^*$$

可轉變為雙曲函數的加法公式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh}(z+z^*)&=\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z^*+\operatorname{ch}z\operatorname{sh}z^*\\ \operatorname{ch}(z+z^*)&=\operatorname{ch}z\operatorname{ch}z^*+\operatorname{sh}z\operatorname{sh}z^*\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

同樣,可得公式

$$\operatorname{sh} z=\frac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 z}}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 z}}。 \tag{10}$$

更有趣的是反變曲函數,卽 $\arg \operatorname{sh} z$, $\arg \operatorname{ch} z$ 及 $\arg \operatorname{th} z$, 因爲它們可以用對數來表示。解方程(6)中的 z, 得

$$\left.\begin{aligned}\arg \operatorname{sh} z&=\ln(z+\sqrt{z^2+1})\\ \arg \operatorname{ch} z&=\ln(z+\sqrt{z^2-1})\\ \arg \operatorname{th} z&=\ln\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

微分關係式(7)及(11),我們得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\operatorname{sh} z}{dz}=\operatorname{ch} z, \quad \frac{d\operatorname{ch} z}{dz}=\operatorname{sh} z, \quad \frac{d\operatorname{th} z}{dz}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}=1-\operatorname{th} z^2,\\ &\frac{d\arg \operatorname{sh} z}{dz}=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \frac{d\arg \operatorname{ch} z}{dz}=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \frac{d\arg \operatorname{th} z}{dz}=\frac{1}{1-z^2}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

展開 e^{φ} 與 $e^{-\varphi}$ 後,從公式(4)可得 $\operatorname{sh}\varphi$ 及 $\operatorname{ch}\varphi$ 對於 φ 的冪級數展開式。這樣就得到

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh}\varphi&=\frac{\varphi}{1!}+\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}+\frac{\varphi^7}{7!}+\cdots\\ \operatorname{ch}\varphi&=1+\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{\varphi^6}{6!}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

這些級數是處處收斂的,因爲 $\operatorname{sh} z$ 及 $\operatorname{ch} z$ 是整函數。

§102a. 保角變換的概念

這個概念,從曲面 S 的地圖問題出發來講最爲自然。所謂曲面 S 的"地圖",乃 S 到平面上的一種映射,在這個映射下,曲面及其地圖上的點是彼此互爲單值同時又互相連續地對應着的。

最值得注意的是這種地圖一角度保持不變的地圖,這就是說,畫在地圖平面上任意兩條相交曲線的交角,恆等於它們在曲面上的對應曲線的交角。在這種條件下,曲面及平面上的無窮小部分是相似的。通常地球表面的地圖就是這樣畫在紙上的。圖製得正確時,每一塊不大的地域都是跟圖上對應部分幾乎類似的,因此,在圖上沒有什麼覺得出來的歪扭而只有按比例的縮小;正由於如此,我們就能從圖上正確斷定那塊地域的輪廓及其各單元間的相互位置。

在畫得準確的保持角度的地圖上,曲面 S 的地區愈小,則它在圖上的形象跟真正的愈相似。因此我們不在圖上一下子畫出整塊曲面 S 的形象,而寧願先把 S 分為許多小塊,再把它們個別表示在圖上。分區地圖集就是這樣畫成的。

顯然,假若我們有曲面 S 上任何一小塊地域的地圖,那末從這張圖又可以得出無窮多個別的這種地圖:為此,只要把曲面 S 的這一張地圖 D^* 再作一個保角變換,把它變為平面域 D。在這種條件下,區域 D 顯然也同樣是曲面 S 上的所論那塊地區的地圖了。

為了說得更準確些,我們再加一個條件:D^* 與 D 兩個區域都是內部域;前者是 UOV 平面上本身不相交割的封閉曲線 C^* 的內部域,後者是 XOY 平面上類似的封閉曲線 C 的內部域。

這樣,為得出曲面 S 上所給地區的一切地圖 D,我們只要會利用互相連續的保角變換,把已知的平面域 D^* 變到任何別的平面區域 D 上去就行了。

從一個平面區域變到另一個上去的這樣一種變換,叫做保角映射。這種變換用複變函數來做是很方便的。

事實上,用 w 及 z 分別表示兩個點,各在區域 D^* 及 D 中,而且是在一個保角映射下彼此對應着的,我們可以把 w 點的附着數寫為複數的形式 $u+iv$,其中 u 及 v 是 w 點的坐標。同樣,我們把 z 的附着數寫為形式 $x+iy$。我們再用那表示點的同一記號來表示該點的附着數,這樣就寫出

$$w=u+iv,$$

$$z=x+iy。$$

假若現在複變量 z 變化着,就是說,假若 z 點在區域 D 內運動起來,那末它在保角映射下的對應點 w 也運動了,換句話說,複變量 w 也開始變化了。反過來說,z 不變時,w 也不變。

從上面所講可知:複變量 w 是複變量 z 的函數;於是,我們可以寫:

$$w=f(z) \tag{1}$$

其中 $f(z)$ 是區域 D 上的連續函數(區域 D 包括圍線 C),並且對於自變量 z 的不同的數值 z_1 及 z_2,這個函數也取得根本不同的數值,也就是,我們有

$$若\ z_1\neq z_2,\quad 則\ f(z_1)\neq f(z_2)。$$

這是由於,對於區域 D 中不同的點,對應了區域 D^* 的根本不同的點。這種函數 $f(z)$ 稱為區域 D 上的單頁函數。

在這些條件下,變量 z 也是變量 w 的函數,也就是我們有:

$$z=g(w), \tag{2}$$

其中函數 $g(w)$ 是 D^*(包括圍線 C^*)上的連續函數,也是在該區域上單頁的函數。

但這時需要滿足一個最重要的要求:變換(1)應當給出從區域 D 到區域 D^* 的一個保角映射,也就是,變換後應當使兩區域內的角度保持不變。顯然,變換(2)也給出了同一個保

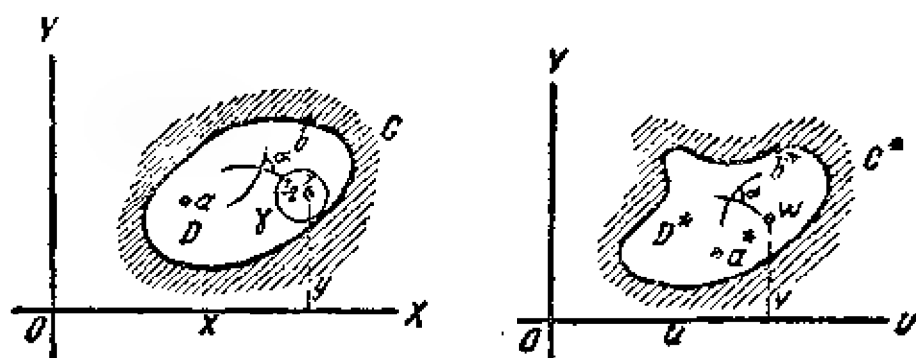


圖 105.

角變換，並且它顯然可從方程(1)解出 z 而得到。

預備定理 1. 線性置換 $w=az+b$，$a\neq 0$，給出了使平面仍變到它本身的一個保角變換，同時變換後無窮遠點 $z=\infty$ 保持不變。

證明　一般形式的線性置換 $w=az+b$，可用三個特殊線性置換得出。這就是，我們把常係數 a 寫爲三角形式

$$a=Re^{i\Phi}$$

後，可把置換 $w=az+b$ 分爲三個基本置換

$$\left.\begin{aligned} z_1&=e^{i\Phi}\cdot z\\ z_2&=Rz_1\\ w&=z_2+b \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

事實上，從(3)中的三個方程消去輔助字母 z_1 及 z_2 後，顯然就得到置換 $w=az+b$。

但第一個基本置換 $z_1=e^{i\Phi}\cdot z$，是把 z 平面以 O 點爲心轉一個固定角度 Φ 的旋轉置換，因若設 $z=\rho e^{i\theta}$ 我們就有 $z_1=\rho e^{i(\theta+\Phi)}$，也就是，$z_1$ 點是由整個 z 平面繞原點 O 旋轉一個固定角度 Φ 而得到的。但是我們都知道，旋轉置換並不改變原圖形的角度(圖 106)。

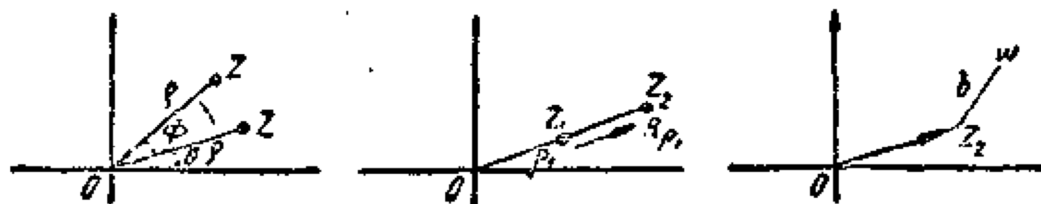


圖 106.

第二個基本置換 $z_2=Rz_1$ ($R>0$ 且爲一常數)是 z_1 平面上的一個相似變換。因若設 $z_1=\rho_1e^{i\theta}$，我們就有 $z_2=R\rho_1e^{i\theta_1}$，也就是，z_1 點沿着原點跟它的連線，從原點 O 遠移到成正比距離 $R\rho_1$ 的地方。這是當 $R>1$ 時的情形；反過來當 $R<1$ 時，z_1 點就往原點移近。我們從初等幾何中知道，相似變換只改變了圖形的大小，而形狀則保持不變，也就是，使圖形中各曲線的交角保持不變。

第三個基本置換 $w=z_2+b$ 只把整個 z_2 平面像剛體似的移動了一下而沒有什麼旋轉。這種移動是由矢量 b 所刻劃的，因爲我們有 $w=z_2+b$，也就是，經過這種變換後 z_2 要移到加在它上面的這個矢量 b 的終點處。圖形的這種移動，當然保持了它的大小及形狀，也就是，保持了其曲線間的交角。

從上面所講各點可知：由平面的旋轉、相似變換及移動所結合而成的一般線性置換 $w=az+b$ 保持圖形的角不變，也就是說，這種置換給出了一個保角變換。

預備定理 2. 當 $n>1$ 時，函數 $f(z)=z^n$ 在含有原點 O 的區域 D 上不可能是單頁的。

證明 設原點位於包圍區域 D 的曲線 C 內。以 O 點爲中心 γ 爲半徑作一個完全在區域 D 內的圓（圖 107）。把圓周分爲 n 個等長的弧段，並在分點各引半徑。這樣，我們就得到 n 個相等的圓扇形。不難看到，在每個扇形中，函數 $w=f(z)$ 都是單頁的，並且它的數值全部填滿了 w 平面上中心爲原點半徑爲 R^n 的整個圓 Γ。爲證明這一點，我們注意，當點 $z=\rho e^{i\theta}$ 畫過整個扇形$\left(\text{扇形的兩個邊界半徑的傾角各爲 } \varphi \text{ 及 } \varphi+\frac{2\pi}{n}\right)$時，其在 w 平面上的對應點 $w=z^n=\rho^n e^{in\theta}$ 畫滿了整個圓 Γ，因爲矢量 w 的長由 O 變到 R^n，而其傾角則由 $n\varphi$ 變到 $n\varphi+2\pi$。因此，當 z 點走過 γ 圓內各處時，則其對應點 w 有 n 次跑遍了 Γ 圓。所以，當 $n>1$ 時，函數 $f(z)$ 在區域 D 上不是單值的。

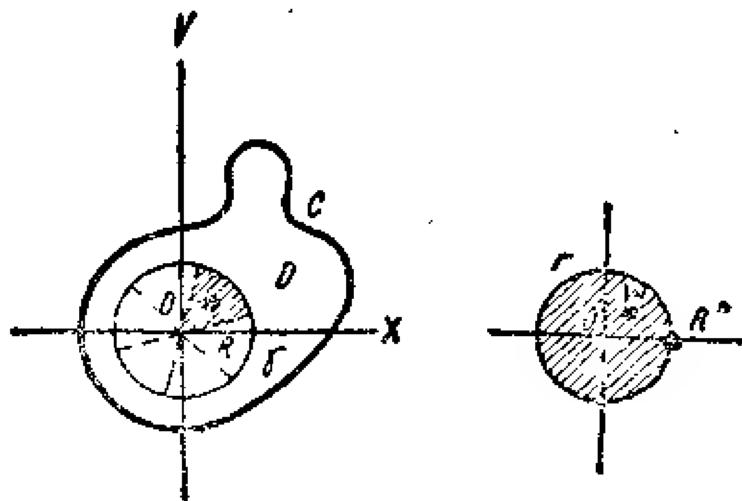


圖 107

正定理 假若單頁函數 $f(z)$ 在區域 D 內處處是解析的，則映射 $w=f(z)$ 是保角的。

證明 設函數 $f(z)$ 在區域 D 內是單頁的及解析的（圖 105）。我們知道：每一個在 D 內解析的函數 $f(z)$ 可展開爲冪級數：

$$w=f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots, \tag{4}$$

在以 z_0 爲中心，不越出 D 外的圓 γ 內，這級數是收斂的。這裏係數 $a_0, a_1, \cdots$ 都是常數，因爲它們只依賴於點 z_0；而我們知道

$$a_0=f(z_0) \quad \text{及} \quad a_1=f'(z_0)。 \tag{5}$$

不難看到，在區域 D 內任一點 z_0 處，導數 $f'(z)$ 不能等於零。因爲若有 $f'(z_0)=0$，則 $a_1=0$，於是在 z_0 點附近，忽略高級無窮小後，展開式(4)就可寫爲:

$$w=a_0+a_n(z-z_0)^n, \quad 其中\ n>1。 \tag{6}$$

但按定理 2，函數(6)不可能在包含 z_0 的區域 D 內是單頁的。由於這個緣故，函數 $f(z)$ 在該區域 D 內也不能是單頁的，但這跟假定相矛盾。

因此，在區域 D 內每一點 z_0，我們都有 $f'(z_0)\neq 0$。因此在 z_0 點附近，忽略高級無窮小後，展開式(4)就可寫爲線性置換形式:

$$w=a_0+a_1(z-z_0). \tag{7}$$

但由於預備定理 1，經過這種置換後，相交於 z_0 點的曲線交角保持不變。因此，映射 $w=f(z)$ 在區域 D 內應當處處都是保角的。（證明完畢）

逆定理　由區域 D 變到區域 D' 的每個保角映射，只能用單頁的解析函數 $w=f(z)$ 來實現；同時，可以適當選擇函數 $f(z)$，使區域 D 的點 a 變到區域 D^* 中任意選定的點 a^*，又使曲線 C 的點 b 變到曲線 C^* 上任意選定的點 b^*。在選好了 a^* 及 b^* 點後，函數 $f(z)$ 是唯一決定了的。

這個重要定理的證明，不能在初等解析課程中講。它之所以重要，在於它把保角變換及單頁的解析函數這兩件事肯定爲完全相同的一件事。

第八章　微分方程

§103. 微分方程．它的階數及次數

凡包含未知函數的導數或微分的方程，叫做微分方程。我們早已遇到過微分方程了。例如從微分方程（參閱§21）

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1}$$

積分後，我們求得：

$$y=x^2+C。 \tag{2}$$

又如（也在§21裏），積分下面的微分方程後：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}, \tag{3}$$

我們得到解：

$$x^2+y^2=2C。 \tag{4}$$

方程（1）及（3）是一階方程，（2）及（4）是它們的一般解。

再舉一個例子：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0。 \tag{5}$$

這是二階微分方程，其所以稱做二階微分方程，是因爲它的最高階導數是二階的。

一般說來，微分方程的階數，乃是其中所含最高階導數的階數。

應該把微分方程的階數跟它的次數分別開來。最高階導數，可能以各種乘方次數出現在微分方程中；其最高的次數，稱爲微分方程的次數。

例如微分方程：

$$y''^2=(1+y'^2)^3 \tag{6}$$

是二階二次的。

§104. 微分方程的解. 積分常量

所謂微分方程的解或積分,乃變量之間的這種關係,從該關係式可推出所給微分方程。例如關係式:

$$y=a\sin x \tag{1}$$

為微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \tag{2}$$

的解。因為將(1)式微分兩次,便有:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\sin x。 \tag{3}$$

又由(1)及(3)將 y 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的表達式代入所給的微分方程(2)可得恆等式:

$$-a\sin x+a\sin x=0。 \tag{4}$$

所以微分方程(2)是恆等地滿足的;而且,這時 a 還是個任意常量。同樣:

$$y=b\cos x$$

在 b 為任何常量時,都是微分方程(2)的解。

關係式

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x \tag{5}$$

乃微分方程(2)的更一般形式的解,因為上面兩個解(1)及(4)顯然包含在這個解(5)中;當我們給 C_1 及 C_2 以特殊數值時:即先設 $C_1=a$, $C_2=0$; 然後又設 $C_1=0$, $C_2=b$, 便可分別得到它們。

(5)中所含的任意常量 C_1 及 C_2 稱為積分常量。凡是像(5)這樣,包含了與方程的階數同樣多的任意常量的解,稱為一般解 ❶。在我們

❶ 若微分方程是 n 階的,則可證明其一般解中恆包含 n 個任意常量。這裏講的是彼此獨立的任意常量,其數目是不能減少的。

的例子中，階數及任意常量的個數都是二。在一般解中，該任意常量一定的數值，所得到的解稱爲特殊解。實際上，從一般解求特殊解時，並不是直接給任意常量以一定的數值，而是根據特殊解所應適合的那些條件來求的。

例 微分方程

$$y''+y=0 \tag{1}$$

的一般解，是 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

求其特殊解，使得

$$\text{當 } x=0 \text{ 時，} y=2 \text{ 及 } y'=-1。 \tag{2}$$

解 從一般解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \tag{3}$$

微分可得：

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x。 \tag{4}$$

考慮到特殊解 $y(x)$ 所應適合的條件（2），我們得到 $C_1=2$ 及 $C=-1$。將常量 C_1 及 C_2 的這些數值代入（3）中，可求得特殊解的形式爲 $y=2\cos x-\sin x$。

通常認爲，當微分方程的解可以表達爲含不定積分的式子時，這解就算是求到底了，而不必管所含積分"積"不積得出來。

§105. 微分方程解的驗證

在討論微分方程的解的問題之先，讓我們指出，用什麼方法可以驗證所求得或所給的解。

例1. 證明

$$y=C_1 x\cos\ln x+C_2 x\cos\ln x+x\ln x \tag{1}$$

是微分方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=x\ln x \tag{2}$$

的解。

解 微分（1），得：

$$\frac{dy}{dx}=(C_2-C_1)\sin\ln x+(C_2-C_1)\sin\ln x+\ln x+1, \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(C_2+C_1)\frac{\sin\ln x}{x}+(C_2-C_1)\frac{\cos\ln x}{x}+\frac{1}{x}。 \tag{4}$$

將(1),(3),(4)式中 y, $\frac{dy}{dr}$ 及 $\frac{d^2y}{dr^2}$ 代入方程(2),我們可知,方程是恆等地滿足的。

例 2. 證明

$$y^2-4x=0 \tag{5}$$

是方程

$$xy'^2-1=0 \tag{6}$$

的特殊解。

解　微分(5),得

$$yy'-2=0,$$

由此

$$y'=\frac{2}{y}。$$

代入(6),化簡,求得:

$$x\left(\frac{2}{y}\right)^2-1=0,$$

亦即

$$4x-y^2=0。$$

根據等式(5)卽知這個結果是完全正確的。

習　題

證實下列各解是其對應微分方程的解:

微分方程	解
1. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2}=0$。	$y=C_1x+C_2x^2$。
2. $\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=0$。	$V=\frac{C_1}{r}+C_2$。
3. $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0$。	$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$。
4. $\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{dy}{dx}+6y=0$。	$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}$。
5. $8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{12y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-27=0$。	$C(y+C)^2=x^3$。
6. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy=0$。	$xy=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$。
7. $\frac{d^2s}{dt^2}+k^2s=0$。	$s_1=C_1\sin(kt+C_2)$。
8. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-10y=2x$。	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}-\frac{x}{5}-\frac{3}{50}$。
9. $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$。	$\frac{x^2}{C_1}+\frac{y^2}{C_2}=1$。
10. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-5x\frac{dy}{dx}+5y=\frac{1}{x}$。	$4y=\frac{1}{3x}+C_1x^5+C_2x$。

11. $x\frac{dy}{dx}-y+x\sqrt{x^2-y^2}=0$。 $\arcsin\frac{y}{x}=C-x$。

12. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=t+\frac{1}{2}$ $s=5\cos 3t+\frac{1}{9}t+\frac{1}{18}$。

13. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=6e^t$。 $x=e^t+2te^t+3t^2e^t$。

14. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=10\sin 3t$。 $x=2(\sin 2t-\sin 3t)$。

15. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=8\sin 2t$。 $x=2(1-t)\cos 2t$。

16. $\frac{ds}{dt}+\frac{2ts}{t^2+1}=\frac{1}{t}$。 $s=\frac{\frac{1}{2}t^2+\ln t}{t^2+1}$。

§106. 一階一次微分方程

所有這種方程可寫爲下面的形式：

$$M\,dx+N\,dy=0, \tag{A}$$

其中 M 及 N 爲字母 x 及 y 的連續函數。最常遇到的這種微分方程，可分爲下列四個類型。

類型 I. 可分離變量的方程 當微分方程中所含的項可以分開 使它取得下面的形式

$$f(x)dx+F(y)dy=0. \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 只是 x 的連續函數，而 $F(y)$ 只是 y 的連續函數，那末把所給方程化到這種形式的手續，稱爲變量分離。這種方程的解，可直接用積分法求得。這樣，積分(1)，得到一般解：

$$\int f(x)dx+\int F(y)dy=C, \tag{2}$$

其中 C 爲任意常量。

當所給的方程不是這種簡單的形式(1)時，常可用下面所講的變量分離法則，來把它化爲這種形式。

第一步 通分去掉分母；若方程包含導數，則用自變量的微分乘它。

第二步 把包含同一微分的各項括在一起作成一項，若經過這個手續後，方程取得形式

$$X_1Y_1\,dx+X_2Y_2\,dy=0,$$

其中 X_1 及 X_2 只是 x 的函數，而 Y_1 及 Y_2 只是 y 的函數，則用 X_2Y_1 來除，可把它化爲形式(1)。

第三步 如(2)所示，將各部分分別積分。

例1. 解方程 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}。$$

解 第一步 $$(1+x^2)xy\,dy=(1+y^2)\,dx。$$

第二步 $$(1+y^2)\,dx-x(1+x^2)y\,dy=0。$$

爲着分離變量，以 $x(1+x^2)(1+y^2)$ 來除，得：

$$\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{y\,dy}{1+y^2}=0。$$

第三步 $$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=C,$$

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}-\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=C,$$

$$\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C,$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=2\ln x-2C。$$

假若我們用 $\ln C$ 代替 $2C$，也就是，假若給任意常量以新的形式，則可將上述結果寫得更緊湊些。我們的解就變成：

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln x^2+\ln C$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln Cx^2$$

答：$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$。

例2. 解方程： $$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}。$$

解 第一步 $$ax\,dy+2ay\,dx=xy\,dy。$$

第二步 $$2ay\,dx+x(a-y)\,dy=0。$$

爲着分離變量，用 xy 來除：

$$\frac{2a\,dx}{x}+\frac{(a-y)\,dy}{y}=0。$$

第三步 $$2a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=C,$$

$$2a\ln x+a\ln y-y=C,\quad a\ln x^2y=C+y,\quad \ln x^2y=\frac{C}{a}+\frac{y}{a}。$$

將對數函數化爲指數函數，可將這個結果改寫爲：

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}+\frac{y}{a}},\ 或\ x^2y=e^{\frac{C}{a}}\cdot e^{\frac{y}{a}}。$$

最後，用字母 C 來記常量 $e^{\frac{C}{a}}$，可得

$$x^2y=Ce^{\frac{y}{a}}。$$

類型 II. 齊次方程 微分方程：

$$M\,dx+N\,dy=0. \tag{A}$$

假若 M 及 N 是 x 及 y 的同次的齊次函數[1]，則稱爲齊次方程。這種微分方程，總可以利用置換

$$y=vx \tag{3}$$

積出來。

這個置換的結果導出 v 及 x 的微分方程，在這個新方程中，變量 v 及 x 是可以分離的，隨之可按第一類型的法則來積分。

事實上，由(A)得：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}。 \tag{4}$$

經過置換(3)後，在(4)式左邊可得：

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v。 \tag{5}$$

作了置換(3)之後，等式(4)的右邊變得僅僅是 v 的函數。因此利用(5)及(3)，我們從(4)得到：

$$x\frac{dv}{dx}+v=f(v) \tag{6}$$

故變量 x 及 v 是很容易分離的。

例 解方程 $$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}。$$

解 $$y^2dx+(x^2-xy)dy=0。$$

---

[1] x 及 y 的函數，若以 λx 及 λy(λ 是任意的)置換 x 及 y 後，得到是原來的函數乘上 λ 的某次方，則該函數稱爲齊次函數；λ 的次數稱爲該齊次函數函數的次數。

這裏 $M=y^2$, $N=x^2-xy$, 兩個都是 x 及 y 的二次齊次函數。因此,我們有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}。$$

設　$y=vx$。 代換後,結果是:

$$x\frac{dv}{dx}+v=-\frac{v^2}{1-v}$$

或即
$$v\,dx+x(1-v)dv=0。$$

爲了分離變量,用 vx 來除。這給出了

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-v)dv}{v}=0。$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{v}-\int dv=C,$$

$$\ln x+\ln v-v=C,$$

$$\ln xv=C+v,\quad vx=e^{C+v}=e^C\cdot e^v,\quad vx=Ce^v。$$

但 $v=\frac{y}{x}$,因此一般解爲:

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}。$$

習　題

求下列各微分方程的一般解:

1. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$。　　答　$(1+y)(1-x)=C$。
2. $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$。　　答　$y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$。
3. $\sqrt{1-y^2}\,dx=\sqrt{1+x^2}\,dy$。　　答　$\arcsin y=\ln C(x+\sqrt{1+x^2})$。
4. $\sqrt{1+y^2}\,dx=(1-x)dy$。　　答　$C(y+\sqrt{1+y^2})=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$。
5. $(1+x^2)\,dy=\sqrt{1-y^2}\,dx$。　　答　$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{x+C}{1-Cx}$。
6. $(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)dy=0$。　　答　$\arctan y+\ln C\sqrt{1+x^2}=0$。
7. $(2x+1)dy+y^2\,dx=0$。　　答　$Ce^{-\frac{1}{y}}=\sqrt{2x+1}$。
8. $(1+2y)x\,dx+(1+x^2)dy=0$。　　答　$(1+x^2)(1+2y)=C$。
9. $(1+y^2)dy-y\,dx=0$。　　答　$x=\frac{y^2}{2}+\ln Cy$。
10. $(x+y)dx+x\,dy=0$。　　答　$x^2+2xy=C$。
11. $(x+y)dx+(y-x)dy=0$。　　答　$\ln(x^2+y^2)-2\arctan\frac{y}{x}=C$。
12. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$。　　答　$1+2Cy-C^2x^2=0$。

13. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$。 答 $y^3=3x^3\ln Cx$。

14. $(x^2-2y^2)dx+2xy\,dy=0$。 答 $y^2+x^2\ln Cx=0$。

15. $(x^2-y^2)dx=2xy\,dy$。 答 $y^2=\frac{Cx^3-1}{3Cx}$。

16. $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}$。 答 $u=\frac{C+v}{1-Cv}$。

17. $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$。 答 $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=C$。

18. $2x^2y\,dy=(1+x^2)dx$。 答 $y^2=x-\frac{1}{x}+C$。

19. $(x^2y+x)dy+(xy^2-y)dx=0$。 答 $xy+\ln\frac{y}{x}=C$。

20. $\sqrt{1-y^2}\,dx=3x^2y\,dy$。

21. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{y^2-x^2}\,dx$。

22. $(y^2-9)dx+x\,dy=0$。

23. $(2x+y)dx+(x+y)dy=0$。

24. $y^2dx=(xy-x^2)dy$。

25. $(\sqrt{xy}-x)dy+y\,dx=0$。

26. $(3x+4y)dy=(2x-y)dx$。

27. $(x+xy^2)dy-3dx=0$。

28. $xy\,dy-(1-y^2)dx=0$。

29. $(1+x)dy-(1-x)dx=0$。

在下列各問題中,求由變量 x 及 y 的所給數值所定的特殊解:

30. $\frac{dx}{y}+\frac{dy}{x}=0$; $x=3$, $y=4$。 答 $x^2+y^2=25$。

31. $x(x+2y)dy-y^2dx=0$; $x=1$, $y=1$。 答 $xy+y^2=2x$。

32. $(1+y^2)dx-xy\,dy=0$; $x=1$, $y=0$。 答 $x^2-y^2=1$。

33. $(x+y)dy+(x-y)dx=0$; $x=0$, $y=1$。

34. 若曲線上每點的切線斜率等於 $-\frac{y}{x+y}$, 且該曲線通過點(1, 1), 求它的方程。

答 $y^2+2xy=3$。

35. 若曲線上每點的切線斜率等於$\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$, 且該曲線通過原點,求其方程。

答 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$。

類型 III. 線性方程　y 的一階線性方程具有下面的形式

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \tag{B}$$

其中 P 及 Q 只是 x 的連續函數,或是常量。

同樣,方程

$$\frac{dx}{dy}+Hx=J, \tag{C}$$

其中 H 及 J 只是 y 的連續函數或是常量,也是線性方程。

為着積分(B),設

$$y=uz, \tag{7}$$

其中 u 及 z 為自變量 x 的未知函數——是待定的。微分(7)式,得:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}。\tag{8}$$

由等式(7)及(8)將 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 代入方程(B),得:

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+Puz=Q,$$

或

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)\cdot z=Q。\tag{9}$$

我們總可以假定:第一個未知函數 $u(x)$ 使括號內的式子等於零,也就是,可以假定

$$\frac{du}{dx}+Pu=0。\tag{10}$$

實際上,為求這種函數 $u(x)$,只要將微分方程(10)積分。這是很容易做的,因為在該方程中變量 x 及 u 是可分離的。

利用所求得的函數 $u(x)$,使方程(9)中的括號等於零後,解方程(9)的剩餘部分:

$$u\frac{dz}{dx}=Q。\tag{11}$$

便可求第二個未知函數 $z(x)$。在這個方程中,變量 x 及 z 也是可分離的。顯然,所求得的函數 $u(x)$ 及 $z(x)$ 是適合方程(9)的;故線性方程的解,係由公式(7)所給出。

下面的例子說明了詳細做法。

例 1. 解方程:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}。\tag{12}$$

解 顯然,這個方程是線性的,具有(B)的形式,其中

$$P=-\frac{2}{x+1} \text{ 及 } Q=(x+1)^{\frac{5}{2}}。$$

設 $y=uz$，則
$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}。$$

代入所給方程(12)中，得：

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}-\frac{2uz}{1+x}=(x+1)^{\frac{5}{2}},$$

或
$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}-\frac{2u}{1+x}\right)z=(x+1)^{\frac{5}{2}}。\tag{13}$$

第一個因子 $u(x)$，可把括號內的式子等於零後定出。這就有

$$\frac{du}{dx}-\frac{2u}{1+x}=0,$$

或
$$\frac{du}{u}=\frac{2dx}{1+x}。$$

積分後，求得 $\ln u=2\ln(1+x)$。由此，

$$u=e^{2\ln(1+x)}=[e^{\ln(1+x)}]^2=(1+x)^2 \text{ ❶},\tag{14}$$

有了這個函數 $u(x)$，方程(13)就變為

$$u\frac{dz}{dx}=(x+1)^{\frac{5}{2}},\tag{13*}$$

因為含有因子 z 的這一項變成了零。鑑於(14)，我們可把(13*)寫成

$$\frac{dz}{dx}=(x+1)^{\frac{1}{2}}。$$

積分後，得：
$$dz=(x+1)^{\frac{1}{2}}dx,$$

也就是
$$z=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C。\tag{15}$$

將(14)及(15)代入等式 $y=uz$，我們最後得到一般解：

$$y=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3}+C(x+1)^2。$$

例 2. 試導出方程(B)的一般解的公式。

解 解(10)，得
$$\ln u+\int P\,dx=\ln k,$$

其中 $\ln k$ 為積分常量。由此得：

$$u=ke^{-\int P dx}。$$

將這個函數 $u(x)$ 代入(11)，並分離變量 x 及 z，求得：

---

❶ 由自然對數的定義即知，$e^{\ln N}=N$。為簡單起見，決定 $u(x)$ 時，我們設任意常量為零(關於這點請參閱下面例 2)。

$$dz=\frac{Q}{k}e^{\int Pdx}dx.$$

積分後，代入(7)，最後得：

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right)。$$

這裏要注意，常數 k 並不出現在最後結果中；由於這個緣故，解方程(10)時，可以不寫它。

類型 IV. 可化爲線性形式的方程 有些方程，本身並不是線性的，但可以利用適當變換，變爲線性形式。這種方程的一種類型是

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n, \tag{D}$$

其中 P 及 Q 只是 x 的連續函數或常量。利用置換 $z=y^{-n+1}$，可將方程(D)變爲線性形式(B)。然而，假若我們直接利用求第三類型方程的解的一般方法，那就不必這樣化了。

我們用例子來說明它。

例 解方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2。 \tag{16}$$

解 該方程具有方程(D)的形式，因爲這裏：

$$P=\frac{1}{x},\ Q=a\ln x,\ n=2$$

設 $y=uz$，則 $\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$。

代入(16)，求得：
$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+\frac{uz}{x}=a\ln x\cdot u^2z^2,$$

亦即

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}\right)z=a\ln x\cdot u^2z^2。 \tag{17}$$

令括號內的式子等於零，求第一個因子 u。這給出了：

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0,\ \frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}。$$

積分後，得 $\ln u=-\ln x=\ln\frac{1}{x}$；隨之：

$$u=\frac{1}{x}。 \tag{18}$$

用所求得的函數 $u(x)$ 代入方程(17)後，得：

$$u\frac{dz}{dx}=a\ln x\cdot u^2z^2,$$

由此
$$\frac{dz}{dx}=a\ln x\cdot uz^2,$$

將等式(18)所給出的函數 $u(x)$ 代入,得:
$$\frac{dz}{dx}=a\ln x\frac{z^2}{x},$$

亦即
$$\frac{dz}{z^2}=a\ln x\cdot\frac{dx}{x}。$$

積分後,求得 $-\frac{1}{z}=\frac{a(\ln x)^2}{2}+C$,由此:
$$z=-\frac{2}{a(\ln x)^2+2C}。\tag{19}$$

由(18)及(19)式將 u 及 z 的表達式代入等式 $y=u\cdot z$ 中,得一般解:
$$y=-\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{a(\ln x)^2+2C},$$

或
$$xy[a(\ln x)^2+2C]+2=0。$$

習 題

求下列各微分方程的一般解:

1. $\frac{dy}{xy}+y=e^{-x}$。 答 $y=(x+C)e^{-x}$。
2. $\frac{dy}{dx}-\frac{ny}{x}=e^x x^n$。 答 $y=x^n(e^x+C)$。
3. $\frac{dy}{dx}+\frac{ny}{x}=\frac{a}{x^n}$。 答 $y=\frac{ax+C}{x^n}$。
4. $\frac{ds}{dt}\cos t+s\cdot\sin t=1$。 答 $s=\sin t+C\cdot\cos t$。
5. $\frac{ds}{dt}+s\cdot\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$。 答 $s=\sin t-1+Ce^{-\sin t}$。
6. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$。 答 $2y=(x+1)^4+C(x+1)^2$。
7. $\frac{dy}{dx}-\frac{ay}{x}=\frac{x+1}{x}$。 答 $y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$。
8. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$。 答 $\frac{1}{y^2}=x^2+1+Ce^{x^2}$。
9. $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$。 答 $\frac{1}{y}=1+Cx+\ln x$。
10. $\frac{dy}{dx}+\frac{(1-2x)y}{x^2}=1$。 答 $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$。
11. $3\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x+1}=\frac{x^3}{y^2}$。 答 $60y^3(x+1)^2=10x^6+20x^5+15x^4+C$。

12. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x+\sqrt{1-x^3}}{(1-x^2)^2}$。　　答　$y=Ce^{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

13. $\frac{dy}{dx}+\frac{4xy}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^3}$。　　答　$y(x^2+1)^2=\arctan x+C$。

14. $\frac{dy}{dx}-y\cot x=y^3\csc x$。　　答　$y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$。

15. $\frac{dy}{dx}=x+y$。

16. $\frac{dy}{dx}=x^2+y$。

17. $\frac{ds}{dt}\sin t+2s\cos t=\sin 2t$。

18. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$。

19. $\frac{dy}{dx}+2y=e^{5x}$。

20. $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=e^{x^2}$。

21. $\frac{dy}{x}-4y=\sin 3x$。

22. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^5y^2$。

23. $y\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=\cos x$。

24. $x^3\frac{dy}{dx}+4y=12$。

就下列各問題中所給的 x 及 y 的數值，求特殊解：

25 $x\frac{dy}{dx}-2y=x^3e^x$; $x=1$, $y=0$。　　答　$y=x^2(e^x-e)$。

20. $x\frac{dy}{dx}+y=3$; $x=1$, $y=0$。　　答　$xy=3(x-1)$。

27. $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$; $x=0$, $y=0$。　　答　$y=\sin x$。

28. $x\frac{dy}{dx}+y=x+1$; $x=2$, $y=3$。　　答　$y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$。

29. 求曲線方程，其切線斜率在每一點處等於 $y+2x$，且該曲線通過原點。

答　$y=2(e^x-x-1)$。

30. 求曲線方程，其切線斜率在每一點處等於 $xy(x^2y^2-1)$，且該曲線通過點 $(0,1)$。

答　$y^2=\frac{1}{x^2+1}$。

§107. 高階微分方程的兩個特殊類型

第一類型　我們常遇到：

$$\frac{d^ny}{dx^n}=X, \tag{E}$$

其中 X 只是 x 的函數，或常量。

為積分它，將它的兩邊各乘以 dx。積分後得：

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int\frac{d^ny}{dx^n}dx=\int X\,dx+C_1。$$

繼續這樣下去，再作 $n-1$ 次，則得包含 n 個任意常量的一般解。

例　解：
$$\frac{d^3y}{dx^3}=xe^x。$$

解　兩邊乘以 dx，積分後，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int xe^x\,dx+C_1,$$

或
$$\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x-e^x+C_1。$$

再重複這步作法，得：

$$\frac{dy}{dx}=\int xe^x\,dx-\int e^x\,dx+\int C_1\,dx,$$

亦即：
$$\frac{dy}{dx}=xe^x-2e^x+C_1x+C_2。$$

最後
$$y=\int xe^x\,dx-\int 2e^x\,dx+\int C_1x\,dx+\int C_2\,dx+C_3=xe^x-3e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3,$$

即：
$$y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3。$$

第二類型　它是：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Y, \tag{F}$$

其中 Y 只是 y 的函數。這類型有很大的意義。

這類微分方程的積分法如下。

先寫出等式：　　$dy'=Y\,dx$

兩邊各乘以 y'，得：　　$y'\,dy'=Yy'\,dx$。

但 $y'\,dx=dy$；因此可得：

$$y'\,dy'=Y\,dy。$$

現在，變量 y 及 y' 是分離了的。積分後，得：

$$\frac{1}{2}y'^2=\int Y\,dy+C_1。$$

這等式的右邊只有 y 的函數。取兩邊的平方根，我們可以分離變量 x 及 y；再積分，即得所求解。

下面的例子說明這個方法的用法。

例　解
$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0。$$

解　這裏 $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y$，方程是屬於(F)型的。兩邊各乘以 $y'dx$，照上面所講的來做，得：

$$y'\,dy'=-a^2y\,dy。$$

積分後：　$\frac{1}{2}y'^2=-\frac{1}{2}a^2y^2+C$；$y'=\sqrt{2C-a^2y^2}$；$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1-a^2y^2}$，

其中 $C_1=2C$，根據係取正值。分離變量，得：

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1-a^2y^2}}=dx。$$

再積分一次：
$$\frac{1}{a}\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=x+C_2,$$

亦卽
$$\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=ax+aC_2。$$

但我們由反三角函數的定義卽知，這個等式相當於下面的等式：

$$\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=\sin a(x+C_2)=\sin ax\cos a\,C_2+\cos ax\sin a\,C_2。$$

故得：
$$y=\frac{\sqrt{C_1}}{a}\cos a\,C_2\cdot\sin ax+\frac{\sqrt{C_1}}{a}\sin a\,C_2\cdot\cos ax。$$

由此最後得：
$$y=c_1\sin ax+b_2\cos ax。$$

習　題

求下列各微分方程的一般解：

1. $\frac{d^2x}{dt^2}=t^2$。　答　$x=\frac{t^4}{12}+C_1t+C_2$。

2. $\frac{d^2x}{dt^2}=x$。　答　$x=C_1e^t+C_2e^{-t}$。

3. $\frac{d^2x}{dt^2}=4\sin 2t$。　答　$x=-\sin 2t+C_1t+C_2$。

4. $\frac{d^2x}{dt^2}=e^{2t}$。　答　$x=\frac{e^{2t}}{4}+C_1t+C_2$。

5. $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{(s+1)^3}$。　答　$C_1(s+1)^2=(C_1t+C_2)^2+1$。

6. $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{as}}$。　答　$3t=2a^{\frac{1}{4}}(s^{\frac{1}{2}}-2C_1)(s^{\frac{1}{2}}+C_1)^{\frac{1}{2}}+C_2$。

7. $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{a}{y^3}$。　答　$C_1y^2=a+(C_1t+C_2)^2$。

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^2}{y^2}=0$。

答 $\sqrt{C_1y^2+y}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y}+\sqrt{1+C_1y})=aC_1\sqrt{2}x+C_2$。

9. $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k}{s^2}=0$。 求 t，已知 $t=0$ 時，$s=a$ 及 $\frac{ds}{dt}=0$。

答 $t=-\sqrt{\frac{a}{2k}}\left\{\sqrt{as-s^2}+a\arcsin\sqrt{\frac{a-s}{a}}\right\}$。

10. $\frac{d^2y}{dx^2}=x\sin x$。 11. $\frac{d^2s}{dt^2}=a\cos nt$。 12. $\frac{d^2y}{dx^2}=4y$。

§108. 降階法

我們將要講微分方程經過適當的變換後，可以降階的幾種情形。

第一種情形 當微分方程不包含未知函數 y，而只包含 x 及導數 $y', y'', \cdots$ 時，則它可以用一個比它低一階的方程代替。

事實上，設有不包含 y 的微分方程 $\Phi[x, y', y'', \cdots, y^{(n)}]=0$。我們可將 y'（不是 y）當作未知函數。這時，

$$y''=\frac{dy'}{dx},\ y'''=\frac{d^2y'}{dx^2},\ \cdots,\ y^{(n)}=\frac{d^{n-1}y'}{dx^{n-1}}。$$

因而，我們得到未知函數 y' 的一個 $n-1$ 階微分方程，它已經不是 n 階的方程了。

若我們能求出這個新的未知函數 y'，並把它表達爲 x 的函數，則 y 就可以用一次積分來表達了。

例 求一曲線，其曲率等於橫坐標的已知函數 $\varphi'(x)$。

解 令函數 $\varphi'(x)$ 等於曲率的表達式[上册，§135 公式(1)]，得到所求曲線的微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\varphi'(x)。$$

這個方程中，未知函數 y 並沒有出現。因此，取 y' 爲未知函數後，二階可降低到一階。這樣，就有：

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\varphi'(x)dx。$$

由此，積分一次，用 c 表示積分常數，得

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\varphi(x)+c。$$

用代數方法解出這個方程的未知量 y'，得：

$$y'=\frac{\varphi+c}{\sqrt{1-(\varphi+c)^2}}。$$

故

$$dy=\frac{(\varphi+c)dx}{\sqrt{1-(\varphi+c)^2}}。$$

由此，積分一次，可得未知函數 y：

$$y=\int\frac{(\varphi+c)dx}{\sqrt{1-(\varphi+c)^2}}+C,$$

其中 C 爲第二個任意常量，這是應當有的，因爲決定未知函數的微分方程，本來是二階的。

第二種情形　當微分方程中不含有自變量 x 的顯式時，則恆可用低一階的方程來代替它。

事實上，設

$$\Phi\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

爲所給的方程。記住：

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

我們有：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dy'}{dy}。$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dy}\left(y'\frac{dy'}{dy}\right)\cdot y'=\frac{d^2y'}{dy^2}y'^2+\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2y',$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dy}\left[\frac{d^2y'}{dy^2}y'^2+\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2y'\right]\cdot y'=\cdots。$$

我們看到，取 y' 爲未知函數，而 y 爲自變量，我們可將方程降低一階，因而把方程寫爲下面的形式：

$$F\left(y,y',\frac{dy'}{dy},\cdots,\frac{d^{n-1}y'}{dy^{n-1}}\right)=0。$$

當我們求到 y' 爲 y 的函數時，亦即求得

$$y'=\varphi(y)$$

時，則分離變量後可得 y；因爲由

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y)$$

可得：
$$dx=\frac{dy}{\varphi(y)},$$
故：
$$x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}。$$

例　求一曲線，其曲率半徑正比於其法距。

解　取曲率半徑 R 的表達式[參閱上册 §138，公式(7)] $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$，又取法距表達式 $y\sqrt{1+y'^2}$，用 n 表示比例係數，我們得到所求曲線的微分方程：
$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=ny\sqrt{1+y'^2}$$
或化簡爲
$$\frac{1+y'^2}{y''}=ny。\tag{1}$$

這個方程不包含字母 x。按所講法則，我們有 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot y'$。

因此，微分方程可寫爲：
$$1+y'^2=nyy'\frac{dy'}{dy}$$
或
$$n\frac{y'\,dy'}{1+y'^2}=\frac{dy}{y}。$$
積分後，以 c 表示積分常量，求得
$$\frac{n}{2}\ln(1+y'^2)=\ln cy,$$
亦卽
$$cy=(1+y'^2)^{\frac{n}{2}}。\tag{I}$$

這裏，本可照上面所講的法則來做，也就是，先由方程中定出 y' 爲 y 的函數，然後分離變量，積分所得的等式，像課文所講的那樣做。但比較簡單的做法如下。先將所得等式微分
$$cy'\,dx=ny'(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}dy'$$
化簡：
$$c\,dx=n(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}dy'$$
積分後：
$$cx=n\int(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}dy'。\tag{2}$$

這個等式(2)，在算出右邊的不定積分出現第二個任意常量 C_1 後，直接給出用 y' 表示 x 的表達式。

比較所得到的等式(1)及(2)，由此消去 y'，我們可得 y 與 x 之間的關係式，並有兩個任意常量 C 及 C_1。這兩個任意常量是應當有的，因爲曲線的微分方程(1)是一個二階的方程。

若比例係數 n 是整數，則方程(2)總能給出用 y' 的代數或對數(包括 arc tan)函數表示的 x。最值得注意的情形如下：

（1）$n=1$。這時由方程（2）得：

$$cx=\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})。\qquad (2)$$

我們這裏不寫常量 C_1，因爲寫進去只不過變換了坐標。從方程（1）及（2）消去字母 y'，得

$$cy=\frac{e^{cx}+e^{-cx}}{2}。$$

這是懸鏈線。

（2）$n=-1$。這時由方程（2）得

$$cx=-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}。\qquad (2)$$

和上面的理由一樣，不要常量 C_1。由（1）及（2）式消去 y'，得

$$cx^2+cy^2=1,$$

亦即得曲線爲圓。

（3）$n=2$。由方程（2），得

$$cx=2y'。\qquad (2)$$

由（1）及（2）消去 y'，得　$cy=1+\frac{c^2x^2}{4}$，

亦即得曲線爲拋物線。

（4）$n=-2$。設 $y'=\tan\frac{\varphi}{2}$ 及 $\frac{1}{c}=2a$。由方程（2）得：

$$x=-a(\sin\varphi+\varphi)\qquad (2)$$

由方程（1）得

$$y=a(1+\cos\varphi)。\qquad (1)$$

以 $\pi-\varphi$ 代 φ，x 代 $x+a\pi$，最後得：

$$y=a(1-\cos\varphi),\ x=a(\varphi-\sin\varphi)。$$

這是擺線。

這樣，只變化 n 的整數值，即可得各種久已聞名的曲線。這表示了，這些曲線實際上都具有同一幾何性質。

第三種情形　當方程對於 y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, …來說是齊次時，就可降低其階數。

爲此，只須設

$$y'=e^{\int z dx}。$$

於是

$$\frac{dy}{dx}=e^{\int z dx}\cdot z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int z dx}\cdot z^2+e^{\int z dx}\cdot\frac{dz}{dx},$$

……………………………………

假若將這些表達式代入所設的方程中，則方程中每項都得到一個因子 $e^{\int z dx}$，其次數卽爲齊次方程的次數。將這個公共因子括出來，並消去它（因爲它不會等於零），我們得到對於字母 z 的新的微分方程。因爲用 z 對於 x 的導數表示導數 $\frac{d^ky}{dx^k}$ 時，階數不高於 $k-1$，故新的微分方程的階數比所給的微分方程的階數低。

例 降低方程 $xyy''+xy'^2-yy'=0$ 的階數。

解 因爲方程對於 y, y' 及 y'' 是齊次的，故按一般法則，設 $y=e^{\int z dx}$，求得 $y'=e^{\int z dx}\cdot z$ 及 $y''=e^{\int z dx}z^2+e^{\int z dx}\cdot z'$。由此，將 y, y' 及 y'' 的數達式代入原方程中，得：

$$xe^{\int z dx}(e^{\int z dx}z^2+e^{\int z dx}z')+xe^{2\int z dx}z^2-e^{2\int z dx}z=0。$$

消去因子 $e^{2\int z dx}$ 後，得：

$$x(z^2+z')+xz^2-z=0。$$

這是一階方程，隨之我們已把原方程降低了一階。

我們不難將原方程解到底。事實上，注意到 $(yy')'=yy''+y'^2$，我們就可將原方程改寫爲：

$$x(yy')'=yy'。$$

由此設 $yy'=u$，乃有：$xu'=u$。隨之，$\frac{u'}{u}=\frac{1}{x}$，亦卽 $(\ln u)'=\frac{1}{x}$。積分後，得：$\ln u=\ln x+$ $+\ln c$，其中 c 爲任意常量。因此 $u=cx$。將所得函數 u 代入方程 $yy'=u$ 中，得 $yy'=cx$。由此 $2yy'=2cx$，亦卽 $(y^2)'=2xc$。再積分，得：$y^2=cx^2+c_1$，其中 c_1 是第二個任意常量。最後，得 $y=\sqrt{cx^2+c_1}$。

§109. 二階線性齊次方程的一般積分的形式

微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{I}$$

其中 p 及 q 只是 x 的連續函數（在特殊情形下可以是常數），稱爲二階線性齊次方程，或者叫做缺右邊部分的方程。

假若在方程右邊的，不是零而是 x 的一個連續函數 X，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X, \tag{II}$$

則該方程稱為二階線性非齊次方程，或者叫做帶右邊部分的方程。

現在，我們的目標是：求齊次方程的一般積分的形式。

為此，我們依據下面的定理❶。這定理是沒有什麼例外的，因此在底下的講解中，我們把它看作一個原理：

假若齊次方程的係數 p 及 q 都是 x 的線段 $[a, b]$ 上的連續函數，則該方程的每一個特殊解，一定是在 $[a, b]$ 上連續的。

為求一般解的形式，我們取一個先已定好的，但不管是什麼樣的一個不恆等於零的特殊解 $y_1(x)$。設 $y_1(x_0)\neq 0$，其中 x_0 為線段 $[a, b]$ 上的一個固定點。

用 $y(x)$ 表示齊次方程的任一特殊解，我們有：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \tag{1}$$

及

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+p\frac{dy_1}{dx}+qy_1=0。 \tag{2}$$

用 y_1 乘（1）式，y_2 乘（2）式，然後相減，得

$$\frac{y_1d^2y-yd^2y_1}{dx^2}+p\cdot\frac{y_1dy-ydy_1}{dx}=0。 \tag{3}$$

設

$$\frac{y_1dy-ydy_1}{dx}=z。 \tag{4}$$

我們看到，（3）可以改寫為：

$$\frac{dz}{dx}+p\cdot z=0。$$

由此，分離變量後，得到：

$$z=C_2\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}pdt}, \tag{5}$$

❶ 其證明在深一些的解析教程裏有。

其中 C_2 爲任意常量。

另一方面,等式(4)可改寫爲:

$$\frac{dy}{dx}+y\cdot\left(-\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}\right)=\frac{z}{y_1}。\qquad (6)$$

這是 y 的一階線性方程,其中 y_1 及 z 都是已知函數。因此,對於方程(6),應用一階線性方程的微分法則(§106,第三類型),我們求得表達式:

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}\frac{dy_1}{y_1}}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{z}{y_1}\cdot e^{-\int_{x_0}^{t}\frac{dy_1}{y_1}}dt+C_1\right),\qquad (7)$$

其中 C_1 爲任意常量。如果算出了積分:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy_1}{y_1}=\ln y_1(x)-\ln y_1(x_0)=\ln\frac{y_1(x)}{y_1(x_0)}$$

並將它的值代入(7)式,那末(7)式可變得很簡單。事實上,我們得到:

$$y=y_1\left(\int_{x_0}^{x}\frac{z}{y_1^2}dt+C_1\right)。$$

按公式(5),用 z 的表達式代入,最後可得:

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\int_{x_0}^{t}p(\alpha)d\alpha}}{y_1^2(t)}dt。\qquad (8)$$

這樣,二階齊次方程的一般積分可寫爲

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),\qquad (9)$$

其中 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 爲該齊次方程的兩個特殊解,而 C_1 及 C_2 爲任意常量[❶]。

這時,應當特別注意:第一個特殊解 $y_1(x)$ 在 x_0 點是取爲不等於零的,因爲我們曾有不等式 $y_1(x_0)\neq 0$;而第二個特殊解

❶ $y_1(x)$ 是齊方程的特殊解,這是不講就清楚的,因爲 $y_1(x)$ 就是取得這樣的。至於 $y_2(x)$ 亦爲齊次方程的解,則是由於,對於常量 C_1 及 C_2 的所有數值,公式(9)恆給出了齊次方程的特殊解,所以當 $C_1=0$, $C_2=1$ 時,也給了特殊解,這就是 $y_2(x)$。

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\int_{t_0}^{t}p(\alpha)d\alpha}}{y_1^2(t)}dt, \tag{10}$$

則在 x_0 點處等於零，因爲上下限相同的積分爲零。

爲了使得這個說明的意義弄得清楚些，我們引入一個重要的定義。

定義　齊次方程的兩個任意特殊解 Y_1 及 Y_2，假若不能有恆等式 $a_1Y_1+a_2Y_2\equiv0$，其中 a_1 及 a_2 爲非同時等於零的常數，則稱爲是彼此線性獨立的。

顯然，兩個線性獨立解 Y_1 及 Y_2 中的任一個，都不能恆等於零。因爲假若(比方說) $Y_1\equiv0$，則我們將有恆等式 $a_1Y_1+a_2Y_2\equiv0$，其中 $a_1=1$ 及 $a_2=0$。

假若 Y_1 及 Y_2 是彼此有線性依賴關係的(非獨立的)則由恆等式 $a_1Y_1+a_2Y_2\equiv0$，其中(比方說) $a_2\neq0$，我們就會導得恆等式 $Y_2\equiv-\frac{a_1}{a_2}Y_1$；故兩個有線性依賴關係的解中，有一個可從另一個乘上常數而得到。

根據上述定義，所論這兩個特殊解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是線性獨立的，因爲其中之一在 x_0 點等於零，$y_2(x_0)=0$，而另一個則一定異於零，$y_1(x_0)\neq0$。因此，它們之中的任一個，都不能從另一個乘上常數而得到。

定理 1.　齊次方程的一般解，可寫爲 $C_1Y_1+C_2Y_2$ 的形式，其中 Y_1 及 Y_2 是互爲線性獨立的兩個任意解，而 C_1 及 C_2 爲任意常量。

由於 Y_1 不恆等於零，我們設 $y_1(x)\equiv Y_1(x)$。另一方面，我們有恆等式

$$Y_2(x)=C_1^*y_2(x)+C_2^*y_2(x),$$

其中 C_1^* 及 C_2^* 是完全確定了的常量。

但常量 C_2^* 一定異於零，否則就會有 $Y_2(x)\equiv C_1^*y_1(x)$，也就是說會有 $Y_2(x)\equiv C_1^*Y_1(x)$。這是不可能的，因爲 Y_1 及 Y_2 是線性獨立的。

因此，必然有 $C_2^*\neq0$，所以有：

$$y_2(x)\equiv-\frac{C_1^*}{C_2^*}Y_1(x)+Y_2(x)。 \tag{11}$$

在一般積分的表達式 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 中，以 $Y_1(x)$ 代 $y_1(x)$，而以公式(11)代 $y_2(x)$，我們得到齊次方程的一般積分的表達式如下：

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x),$$

其中 C_1 及 C_2 爲兩個任意常量。 (證明完畢)

定理 II. 假若 $y_1(x)$ 是任意一個不恆等於零的特殊解，則方程 $y_1(x)=0$ 不可能具有重根，而只有單根。

事實上，若 $y_1(x)$ 及 $y(x)$ 爲齊次方程的任意兩個線性獨立的解，由於公式(4)及(5)，我們有恆等式：

$$y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=C_2\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}, \tag{12}$$

其中常數 C_2 必然不等於零。

實事上，若 $C_2=0$，則有 $y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=0$，亦卽 $\frac{dy}{y}=\frac{dy_1}{y_1}$。由此 $y=Cy_1$，其中 C 爲常量；這表示了 y_1 及 y 將是線性獨立的了。

因此，在公式(12)中，常量 $C_2\neq0$。現在設某數 ξ 爲方程 $y_1(x)=0$ 的重根，於是函數 y_1 本身及其導數 $\frac{dy_1}{dy}$ 在 $x=\xi$ 點都等於零。故在公式(12)中我們必然將有 $C_2=0$，這又是不可能的。 (證明完畢)

定理 III. 齊次方程的任意兩個線性獨立的解 $y_1(x)$ 及 $y(x)$，不可能在同一點處都等於零。

事實上，假若 ξ 是兩個方程 $y_1(x)=0$ 及 $y(x)=0$ 的公共根，則在 ξ 點，我們將有 $y_1=0$ 及 $y=0$；所以公式(12)又會給我們 $C_2=0$，這又是不可能的。 (證明完畢)

定理 IV. 在方程 $y_1(x)=0$ 的兩相鄰根之間，方程 $y(x)=0$ 有而且只有一個根；換句話說，兩個線性獨立的特殊解 y_1 及 y 的零點，是彼此間隔着的。

事實上，我們取方程 $y_1(x)=0$ 的兩個相鄰根 α_1 及 β_1。就幾何意義說，這表示了，在 α_1 及 β_1 之間，函數 $y(x)$ 的圖線用連續弧段 D_1 表

示，它的兩個端點各爲 α_1 及 β_1 點，且在該兩點之間曲線並不與 OX 軸相交。這說明，弧段 D_1 是整個在 Ox 軸的一邊的(108 圖中，在上邊)。又當 M 點延着連續弧段 D_1 移動時，M 點的切線，也連續的移動，在端點 α_1 處與 OX 軸作成銳角；而在端點 β_1 處作成鈍角。這表示，導數 $\frac{dy_1}{dx}$ 在線段 $[\alpha_1, \beta_1]$ 的兩個端點處具有不同的正負號。而函數 $y_1(x)$ 在兩端點處等於零，亦即 $y_1(\alpha_1)=0$, $y_1(\beta_1)=0$。

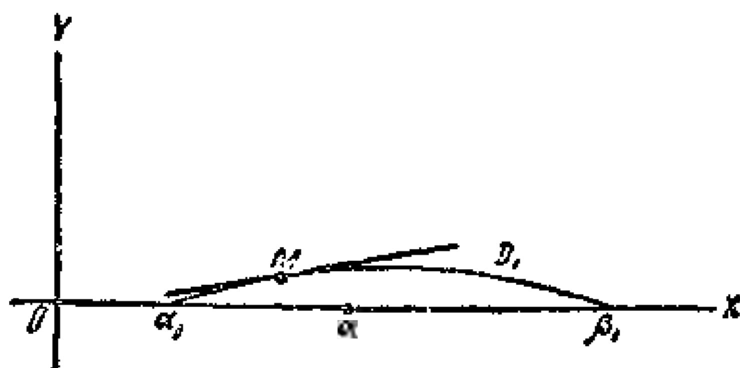


圖 108.

現在來看恆等式(12)。其右邊部分不可能變號，故在整個線段 $[\alpha_1, \beta_1]$ 上它保持一定的正負號(亦即常量 C_2 的正負號)。特別在線段 $[\alpha_1, \beta_1]$ 的兩個端點處，恆等式(12)的右邊具有同一正負號。恆等式(12)左邊的 $y_1\frac{dy}{dx}$，在該線段的兩個端點處，等於零。這意味着 $-y\frac{dy_1}{dx}$ 應當保持同一正負號；但因其第二個因子 $\frac{dy_1}{dx}$ 在 $[\alpha_1, \beta_1]$ 的兩個端點處具有相反的正負號。故由此而知，第一個因子 $y(x)$ 在 $[\alpha_1, \beta_1]$ 的兩個端點處必定有不同的正負號。所以，連續函數 $y(x)$ 一定在線段 $[\alpha_1, \beta_1]$ 內某點等於零。這樣，在方程 $y_1(x)=0$ 的兩相鄰根 α_1 與 β_1 之間，一定有方程 $y(x)=0$ 的一個根。又這種根在那裏只能有一個，因爲假若有幾個的話，則在方程 $y(x)=0$ 的兩根之間，也應當有方程 $y_1(x)=0$ 的根，但這又是不可能的，因在線段 $[\alpha_1, \beta_1]$ 內，該方程不可能有根。

(證明完畢)

例 齊次方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$，具有一般積分 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$。兩個特殊解 $\sin x$ 及 $\cos x$ 是線性獨立的，因此，$\sin x$ 等於零的點［即 $x=k\pi$（k 爲整數）］及 $\cos x=0$ 的點 $\left[\text{即 } x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，是一對對彼此交替間隔着的。

定理 V. 齊次方程恆可以化爲所謂標準形式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-Gy=0,$$

其中 G 只是 x 的函數。

事實上，取齊次方程（1），作置換 $y=uv$，我們求得：

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left(2\frac{du}{dx}+pu\right)\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{d^2u}{dx^2}+p\frac{du}{dx}+qu\right)=0, \tag{13}$$

現在取取適當的函數 u，使我們有：

$$2\frac{du}{dx}+pu=0,$$

爲此，只要取 $u=e^{-\int\frac{p}{2}dx}$。

我們看到，對於函數 $v(x)$ 來說，方程(13)得到了標準形式。(證明完畢)

定理 VI. 二階線性齊次方程的積分法，恆可化爲一個一階非線性方程的積分法，該方程稱爲利卡迪方程，形式如下：

$$z'+z^2+pz+q=0。$$

事實上，在齊次方程（1）中，作置換 $y=e^{\int zdx}$，其中 z 爲未知函數，這時

$$y'=e^{\int zdx}z,\ y''=e^{\int zdx}\cdot z^2+e^{\int zdx}z',$$

消去不等於零的因子 $e^{\int zdx}$ 後，可得所求的利卡迪方程：

$$z'+z^2+pz+q=0。 \tag{14}$$

(證明完畢)

一般說來，所謂利卡迪方程，乃下面這種形式的微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=Py^2+Qy+R, \tag{15}$$

其中 P, Q 及 R 只依賴於 x。這個方程，雖然是一階的，但不是線性的，因爲這裏包含了 y^2 的項。作置換 $y=-\frac{z}{P}$ 之後，顯然可將它化爲形式 (14)。

利卡迪方程，在理論方面（微分方程的解析理論）及實用方面（鐵路運輸力學），都有一系列的極重要的性質。可惜，在一般形式下，利卡迪方程是不能積出來的；但 C. A. 賈普利金院士曾第一次在這個方程上發現了並成功地應用了他那著名的微分方程近似積分法[1]。

利卡迪方程的一般積分，具有下面的形式：

$$y=\frac{f_1+Cf_2}{f_3+Cf_4}, \tag{16}$$

其中 C 爲任意常量，而 f_1, f_2, f_3 及 f_4 爲 x 的幾個確定的函數，但可惜這些函數不能用積分式寫出來。

上面所證關於二階線性齊次微分方程的定理 I，可以毫無限制地擴充到 n 階方程上去。

這樣，

微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \tag{17}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 只是 x 的連續函數，具有一般解的形式如下：

$$y=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots+C_nY_n(x), \tag{18}$$

其中，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是方程 (17) 的特殊解，它們之間只連繫着一個條件，即其中任何一個解都不是其他各個解的線性結合，這就是說：當係數 c_i 中至少有一個異於零時，這些特殊解之間不會有下面的恆等關係：

$$c_1Y_1+c_2Y_2+\cdots+c_nY_n=0$$

這種特殊解 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 稱爲**獨立的**解。

---

[1] C. A. Чаплыгин，“列車運動一般微分方程的新積分法”，1919。“近似積分法” ЦАГИ，1932。又參閱 Б. Н. Петров 著“賈普利金院士理論可應用的範圍”(§3，“Защитное уравнение Риккати”)，ДАН，1946。

§110. 非齊次(帶右邊部分的)方程

二階非齊次微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X,\qquad\text{(II)}$$

其中 p, q 及 X 只是 x 的連續函數,其一般積分的求法如下：

首先求出非齊次方程(II)的任一個特殊解 $y^*(x)$：

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}+p\frac{dy^*}{dx}+qy^*=X\qquad(1)$$

然後由方程(II)減去等式(1),得：

$$\frac{d^2(y-y^*)}{dx^2}+p\frac{d(y-y^*)}{dx}+q(y-y^*)=0。\qquad(2)$$

這是一個二階齊次方程;因爲若用 Y 表示 $y-y^*$, 則有：

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+p\frac{dY}{dx}+qY=0。\qquad(1)$$

我們已經看到,這個方程的一般積分具有下面的形式：

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2,\qquad(3)$$

其中 Y_1, Y_2 是齊次方程(I)的兩個線性獨立的解。

因爲,從另一方面說, $Y=y-y^*$, 故我們有：

$$y-y^*=C_1Y_1+C_2Y_2$$

故最後得：

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2+y^*。\qquad(4)$$

由此而得定理：

非齊次方程 $y''+py'+qy=X$ 的一般解,具有形式 $y=C_1Y_1+$ $+C_2Y_2+y^*$, 其中 C_1 及 C_2 爲任意常量, y^* 爲非齊次方程的任一特殊解,而 Y_1 及 Y_2 則是缺右邊部分的方程的兩個線性獨立的特殊解。

這個定理可推廣到任意階的線性非齊次方程上去：

非齊次方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+py=X,$$

其中 p_i 及 X 只是 x 的連續函數，具有一般解 $y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+$ $+C_nY_n+y^*$，其中 y^* 爲該方程的任意一個特殊解，而 $C_1Y_1+C_2Y_2+$ $+\cdots+C_nY_n$ 爲其對應齊次方程(卽缺右邊部分的方程)的一般解。

§111. 拉格朗日的變化常量法

這個方法的發明，是爲了當我們已知齊次方程的一般解時，好用它來求帶右邊部分的非齊次方程的特殊解。

設我們有一個帶右邊部分的非齊次方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X \tag{II}$$

又設

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2 \tag{1}$$

爲其對應的齊次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0。 \tag{I}$$

的一般解。

求方程(II)的特殊解 y^* 的方法如下：

我們把 C_1 及 C_2 不當作常量，而把它們作爲 x 的函數，要決定它們，使得所求的特殊解 y^* 可以用下面的公式給出：

$$y^*=C_1Y_1+C_2Y_2。 \tag{1*}$$

將這等式微分兩次，得：

$$\frac{dy^*}{dx}=(C_1'Y_1+C_2'Y_2)+(C_1Y_1'+C_2Y_2'), \tag{2}$$

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}=(C_1''Y_1+C_2''Y_2)+2(C_1'Y_1'+C_2'Y_2')+(C_1Y_1''+C_2Y_2'')。 \tag{3}$$

到現在爲止，我們並不曾給函數 C_1 及 C_2 以任何限制。現在設它們的導數 C_1' 及 C_2' 適合一組聯立方程：

$$\left.\begin{aligned}C_1'Y_1+C_2'Y_2=0\\ C_1'Y_1'+C_2'Y_2'=X\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

微分其中的第一個方程，得：

$$(C_1''Y_1+C_2''Y_2)+(C_1'Y_1'+C_2'Y_2')=0。 \tag{5}$$

鑒於等式(4)及(5)，不難看得到，方程(1*)，(2)及(3)可改寫爲：

$$\left.\begin{aligned}y^* &= C_1Y_1+C_2Y_2\\ \frac{dy^*}{dx} &= C_1Y_1'+C_2Y_2'\\ \frac{d^2y^*}{dx^2} &= C_1Y_1''+C_2Y_2''+X\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

用q乘方程組中的第一個方程，又用p乘其中的第二個方程，用1乘第三個方程並把它們都加起來，得：

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}+p\frac{dy^*}{dx}+qy^*=X, \quad (7)$$

這是因爲，由於Y_1及Y_2爲無右邊部分的齊次方程的解，我們應有$Y_1''+pY_1'+qY_1=0$及$Y_2''+pY_2'+qY_2=0$的緣故。

方程(7)告訴我們，按等式(1*)所定出的函數y^*，事實上就是帶右邊部分的方程(II)的特殊解，只要函數C_1及C_2的導數C_1'及C_2'適合代數方程組(4)就行了。

解這組代數方程，求得：

$$C_1'=-\frac{X}{Y_1\left(\ln\frac{Y_2}{Y_1}\right)'} \text{及} \quad C_2'=\frac{X}{Y_2\left(\ln\frac{Y_2}{Y_1}\right)'} \quad (8)$$

再積分即得C_1及C_2。

§112. 常係數二階線性方程

齊次方程

我們取
$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \quad (G)$$

其中p及q都是常量。

爲求方程(G)的特殊解，我們試求常數r，使下面的函數適合方程(G)：

$$y=e^{rx} \quad (1)$$

微分(1)得：
$$\frac{dy}{dx}=re^{rx}, \frac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx}。 \quad (2)$$

將(1)及(2)代入方程(G)，消去不等於零的因子e^{rx}，我們得到

$$r^2+pr+q=0 \quad (3)$$

這是一個二次代數方程，它給出了所求常數r的數值，其根即所需常量r的數值。

方程(3)稱為方程(G)的輔助方程,或特徵方程。

I. 假若特徵方程的兩個根 r_1 及 r_2 是不同的,則

$$Y_1=e^{r_1x} \text{ 及 } Y_2=e^{r_2x} \tag{4}$$

是方程(G)的兩個線性獨立的解。

由此可知,在這種情形下,方程(G)的一般解是:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x},\ r_1\neq r_2。 \tag{5}$$

例 1. 解 $$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0。$$

解 特徵方程是 $r^2-2r-3=0$,其根為 $+3$ 及 -1 因此原方程的一般解為:

$$d=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}。$$

當特徵方程式(3)的根 r_1 及 r_2 是實的且不相等時,則方程(G)的一般解(5)就算是最後結果了。

當特徵方程(3)的根 r_1 及 r_2 是複數時,則方程(G)的一般解(5)應稍作變換,使它可應用到技術及自然科學的問題上。

因為方程(G)的係數 p 及 q 都是實數,故二次方程(3)的複數根 r_1 及 r_2 是共軛的,也就是,這兩個根具有下面的形式:

$$r_1=a+bi \text{ 及 } r_2=a-bi。 \tag{6}$$

因此,當 x 是實變量時,按歐拉公式(§101),可有:

$$\left.\begin{aligned} &e^{r_1x}=e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot e^{bxi}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)\\ \text{及}\quad &e^{r_2x}=e^{(a-bi)x}=e^{ax}\cdot e^{-bxi}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由此,一般解(5)取得形式

$$y=e^{ax}[(C_1+C_2)\cos bx+i(C_1-C_2)\sin bx]。 \tag{8}$$

再引入記號 $c_1=C_1+C_2$ 及 $c_2=i(C_1-C_2)$,我們可將方程(G)的一般解寫為下面的形式:

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx), \tag{9}$$

其中 c_1 及 c_2 為任意常量。從這個一般解的公式可知:下面兩個解

$$Y_1=e^{ax}\cos bx,\ Y_2=e^{ax}\sin bx \tag{10}$$

是方程(G)的兩個線性獨立的實解,而方程(G)的一般實解是:

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx, \tag{11}$$

其中 C_1 及 C_2 是實的任意常數。

例 2. 解 $$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0。$$

解 特徵方程是：$r^2+k^2=0$，其根爲 $r_1=ik$，$r_2=-ik$。因此，跟(6)式比較，可知 $a=0$，$b=k$。故由(11)式，一般解是

$$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx。$$

II. **假若特徵方程(3)的兩個根 r_1 及 r_2 是相等的，則它們必然是實數，且兩者都等於** $r=-\frac{p}{2}$。在這種情形下，

$$Y_1=e^{rx} \text{ 及 } Y_2=xe^{rx},\ r=-\frac{p}{2} \tag{12}$$

是方程(G)的兩個線性獨立的解。

隨之，在這種情形下，方程(G)的一般解是：

$$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx},\ q=-\frac{p}{2}。 \tag{13}$$

爲證明這些，我們將二次方程(3)的根的表達式寫出來：

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}。$$

隨之，當而且僅當 $\frac{p^2}{4}=q$ 時，兩個根才相等。在這種情形下，我們有：$r_1=r_2=r=-\frac{p}{2}$。這樣，方程(G)的第一個特殊解是

$$Y_1=e^{rx},\ r=-\frac{p}{2}。 \tag{14}$$

歸納的看法。 我們可以這樣來求第二個解 Y_2：當方程(3)的兩個根 r_1 及 r_2 不相等時，我們有方程(G)的兩個特殊解：e^{r_1x} 及 e^{r_2x}。比值 $\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}$ 也是方程(G)的特殊解。但按拉格朗日定理，比值 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是正好等於導數 $f'(c)$ 的，這裏 c 在 a，b 之間：$a<c<b$。設 $f(r)=e^{rx}$，$a=r_1$，$b=r_2$，我們有 $\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_1-r_2}=\left[\frac{de^{rx}}{dr}\right]_{r=r^*}$，這裏 r^* 是介於 r_1 及 r_2 之間的，因爲 $\frac{de^{rx}}{dr}=xe^{rx}$，故我們有等式

$$\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}=xe^{r^*x}, \tag{15}$$

這時右邊的表達式,是輔助方程(G)(其特徵方程的根爲 r_1 及 r_2)的特殊解。令這兩個根趨近於同一極限 r,也就是,同時令 $r_1\to r$ 及 $r_2\to r$,則在極限時,我們得到兩根相等 $r_1=r_2=r=-\frac{p}{2}$ 的特徵方程(3)。又因爲 r^* 介於 r_1 及 r_2 之間,故在極限時,必有 $r_1^*\to r$。因此,取極限時輔助方程(G)的特殊解(15)變成

$$xe^{rx},\ \text{其中}\ r=-\frac{p}{2}。\tag{16}$$

自然我們會想到,這就是極限方程(G)的特殊解了。

演繹的看法　特殊解(12)中的 Y_2 可證實如下:

設 $Y_2=xe^{rx}$。微分後:$Y_2'=e^{rx}+rxe^{rx}$,$Y_2''=2re^{rx}+r^2xe^{rx}$。由此 $Y_2''+pY_2'+qY_2=xe^{rx}(r^2+pr+q)+e^{rx}(p+2r)$。但第一個括號是零,因 r 爲特徵方程(3)的根;第二個括號也是零,因 $r=-\frac{p}{2}$。因此 Y_2 是方程(G)的特殊解。顯然這時 Y_1 及 Y_2 是線性獨立的。

例 3. 解 $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$,並求特殊解,使 $t=0$ 時,$s=4$ 及 $\frac{ds}{dt}=-2$。

解　特徵方程爲 $r^2+2r+1=0$,亦卽 $(r+1)^2=0$。由此可知兩個根都等於 -1。因此一般解爲:

$$s=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}=e^{-t}(C_1+C_2t)。$$

爲求滿足所設兩個條件的特殊解,首先求 $\frac{ds}{dt}$。我們有:$\frac{ds}{dt}=(C_2-C_1)e^{-t}-C_2te^{-t}$。在 s 及 $\frac{ds}{dt}$ 的公式中,設 $t=0$,得 $s(0)=C_1$ 及 $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=0}=C_2-C_1$。所以 $C_1=4$ 及 $C_2-C_1=-2$。由此得 $C_2=2$。因此,所求的特殊解是:$s=e^{-t}(4+2t)$。

習　題

求下列方程的一般解:

1. $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+3s=0$。　答　$s=C_1e^{t}+C_1e^{3t}$。
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6y=0$。　答　$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$。
3. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0$。　答　$x=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$。
4. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$。　答　$x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$。
5. $\frac{d^2s}{dt^2}-9s=0$。　答　$s=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$。

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$。 答 $y=C_1+C_2e^{-3x}$。

7. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+13x=0$。 答 $x=e^{2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$。

8. $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+8x=0$。 答 $x=e^{-2t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$。

9. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+4y=0$。

10. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-x=0$。

11. $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}-2\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=0$。

12. $\frac{d^2s}{dt^2}-16s=0$。

13. $\frac{d^2s}{dt^2}+16s=0$。

14. $\frac{d^2s}{dt^2}-16\frac{ds}{dt}=0$。

15. $\frac{d^2x}{dt^2}-8\frac{dx}{dt}+25x=0$。

16. $\frac{d^2s}{dt^2}+6\frac{ds}{dt}+10s=0$。

下列各題中,求满足所設條件的特殊解:

17. $\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+6x=0$; $x=\frac{1}{2}$, $\frac{dx}{dt}=1$ $(t=0)$。 答 $x=\frac{1}{2}e^{2t}$。

18. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$; $y=3$, $\frac{dy}{dx}=0$ $(x=0)$。 答 $y=2e^x+e^{-2x}$。

19. $\frac{d^2s}{dt^2}-4s=0$; $s=6$, $\frac{ds}{dt}=0$ $(t=0)$。 答 $s=3e^{2t}+3e^{-2t}$。

20. $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=10$ $(t=0)$。 答 $s=5\sin 2t$。

21. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$; $y=4$ $(x=0)$, $y=0$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$。 答 $y=4\cos x$。

22. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$; $y=0$, $\frac{dy}{dx}=2$ $(x=0)$。 答 $y=2xe^{3x}$。

23. $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0$; $x=3$, $\frac{dx}{dt}=-3$ $(t=0)$。 答 $x=3e^{-t}\cos t$。

24. $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+5s=0$; $s=1$, $\frac{ds}{dt}=1$ $(t=0)$。 答 $s=e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$。

25. $\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+2s=0$; $s=-1$, $\frac{ds}{dt}=3$ $(t=0)$。

26. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0$; $y=1$, $\frac{dy}{dx}=-1$ $(x=0)$。

27. $\frac{d^2s}{dt^2}+n^2s=0$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=v_0$ $(t=0)$。

28. $\frac{d^2s}{dt^2}+n\frac{ds}{dt}=0$, $s=0$, $\frac{ds}{dt}=n$ $(t=0)$。

29. $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0$; $x=0$, $\frac{dx}{dt}=10$ $(t=0)$。

30. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$; $y=1$, $\frac{dy}{dx}=3$ $(x=0)$。

非齊次方程

我們取方程　$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X, \tag{H}$$

其中 p 及 q 都是常量，X 只是 x 的連續函數。

由 §110. 我們知道，為求非齊次方程(H)的一般解，必須按下面三個步驟來做。

第一步　解齊次方程(G)，設其一般解為：

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2。\tag{17}$$

齊次方程(G)的這個一般解，稱為非齊次方程(H)的**輔助函數**。

第二步　求方程(H)的一個特殊解 y^*。

第三步　非齊次方程(H)的一般解將是：

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2+y^*。\tag{18}$$

最難的要算**第二步**。為使這一步容易做，可利用下面的**法則**，其中的字母，除 x 外，都是常量。

特殊解的求法

一般情形

函數 X 的形式		解 y^* 的形式
$X=a+bx$,	須設	$y^*=A+Bx$。
$X=ae^{bx}$,	須設	$y^*=Ae^{bx}$。
$X=a_1\cos bx+a_2\sin bx$,	須設	$y^*=A_1\cos bx+A_2\sin bx$。

在底下所講的特別情形是例外。

特別情形：

I. 在下列條件下，所設解 y^* 的形式須乘以 x：

(1)當 $x=0$ 是特徵方程(3)的**單**根且 $x=a+bx$ 時；

(2)當 $x=b$ 是特徵方程的**單**根且 $x=ae^{bx}$ 時；

(3)當 $x=\pm bi$ 是特徵方程的根且 $X=a_1\cos bx+a_2\sin bx$ 時；

II. 在下列條件下，所設解 y^* 須乘以 x^2：

(1)當 $x=0$ 是特徵方程的二重根且 $X=a+bx$ 時;

(2)當 $x=b$ 是特徵方程的二重根且 $X=ae^{bx}$ 時。

求出解 y^* 的方法,就是將 y^* 的上列形式代入非齊次方程(H)之中,然後決定常數 A, B, A_1, A_2, 使方程(H)滿足。

例 4. 解
$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2x。$$

解 第一步 解齊次方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$, 按例 1, 得到輔助函數:
$$C_1e^{3x}+C_2e^{-x}。$$

第二步 因為 $x=0$ 不是特徵方程的根, 故 $y^*=A+Bx$。代入所給非齊次方程中, 得 $-2B-3A-3Bx=2x$。令左右兩邊的係數相等, 得: $-2B-3A=0$, 及 $-3B=2$。由此得:
$$A=\frac{4}{9},\ B=-\frac{2}{3}。故\ y^*=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x。$$

第三步
$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x。$$

例 5. 解
$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2e^{-x}。$$

解 第一步 輔助函數如前:
$$C_1e^{3x}+C_2e^{-x}。$$

第二步 這裏 -1 是特徵方程的單根。故設 $y^*=Axe^{-x}$。微分之, $\frac{dy^*}{dx}=Ae^{-x}(1-x)$, 又 $\frac{d^2y^*}{dx^2}=Ae^{-x}(x-2)$。代入所給非齊次方程中, 得:
$$Ae^{-x}(x-2)-2A(1-x)e^{-x}-3Axe^{-x}=2e^{-x}。$$
簡化, 得:
$$-5Ae^{-x}=2e^{-x}。$$
故 $A=-\frac{1}{2}$, 因此:
$$y^*=-\frac{1}{2}xe^{-x}。$$

第三步 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$。

例 6. 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t$ 的特殊解, 使 $t=0$ 時, $s=0$ 及 $\frac{ds}{dt}=2$。

解 第一步 解齊次方程
$$\frac{d^2s}{dt^2}+4x=0,$$
其一般解為 $C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$。

第二步 這裏 $\pm 2i$ 是特徵方程的根, 故設 $s^*=t(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)$。微分後:
$$\frac{ds^*}{dt}=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t-2t(A_1\sin 2t-A_2\cos 2t)。$$
$$\frac{d^2s^*}{dt^2}=-4A_1\sin 2t+4A_2\cos 2t-4t(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)。$$

代入所給的非齊次方程中,並化簡,得:

$$-4A_1\sin 2t+4A_2\cos 2t=2\cos 2t。$$

由此,得 $A_1=0$ 及 $A_2=\frac{1}{2}$,故

$$s^*=\frac{1}{2}t\sin 2t。$$

第三步　所設非齊次方程的一般解爲 $s=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$。應決定常數 C_1, C_2,使 $t=0$ 時,$s=0$ 及 $\frac{ds}{dt}=2$。第一個條件給出了 $C_1=0$,故 $s=C_2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$。

微分後,得 $\frac{ds}{dt}=2C_2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}t\cdot 2\cdot\cos 2t$。設 $t=0$,乃有 $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=0}=2C_2$。故 $C_2=1$。所求的特殊解爲:

$$s=\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t。$$

例 7. 解　$\frac{d^2y}{dx^2}=2x$。

解　第一步　解齊次方程　$\frac{d^2y}{dx^2}=0$。

輔助函數是 C_1+C_2x。

第二步　這裏 $x=0$ 是特徵方程的二重根。故設 $y^*=Ax^3+Bx^2$。

代入所設非齊次方程中,得 $6Ax+2B=2x$。故 $A=\frac{1}{3}$,$B=0$。

第三步　$y=C_1+C_2x+\frac{1}{3}x^3$。

§113.　一般情形下,特殊解 y^* 的求法

設所給的方程爲:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X, \tag{H}$$

其中 p 及 q 都是常數,而 X 只是 x 的連續函數。

應用拉格蘭日方法(§111)來求方程(H)的特殊解 y^*,我們看到,這特殊解是由公式

$$y^*=C_1Y_1+C_2Y_2, \tag{1}$$

給出的,其中 Y_1 及 Y_2 是齊次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \tag{G}$$

的線性獨立的特殊解,這裏 C_1 及 C_2 是 x 的函數,其導數 C_1' 及 C_2' 由拉格蘭日公式

$$C_1'=-\frac{X}{Y_1\left(\ln\frac{Y_2}{Y_1}\right)'} \quad 及 \quad C_2'=\frac{X}{Y_1\left(\ln\frac{Y_2}{Y_1}\right)'} \tag{2}$$

給出。

這些公式對於各種情形，即使在 p 及 q 依賴於 x 時，都能適用。當 p 及 q 爲常數時，拉格蘭日公式獲得極簡單的形式。

第一種情形 特徵方程 $r^2+pr+q=0$，具有兩個不同的實根 r_1 及 r_2。

這裏
$$Y_1=e^{r_1x},\quad Y_2=e^{r_2x}。$$

故
$$\frac{Y_2}{Y_1}=e^{(r_2-r_1)x} \text{ 及 } \ln\frac{Y_2}{Y_1}=(r_2-r_1)x。$$

因此
$$\left(\ln\frac{Y_2}{Y_1}\right)'=r_2-r_1。$$

代入公式(2)，我們有：
$$C_1'=-\frac{X}{e^{r_1x}(r_2-r_1)} \text{ 及 } C_2'=\frac{X}{e^{r_2x}(r_2-r_1)}。$$

由此
$$C_1=-\frac{1}{r_2-r_1}\int_{x_0}^{x}Xe^{-r_1t}\,dt \text{ 及 } C_2=\frac{1}{r_2-r_1}\int_{x_0}^{x}Xe^{-r_2t}\,dt。\tag{3}$$

將所求得的 C_1 及 C_2 代入公式(1)，得：
$$y^*=-\frac{e^{r_1x}}{r_2-r_1}\int_{x_0}^{x}Xe^{-r_1t}\,dt+\frac{e^{r_2x}}{r_2-r_1}\int_{x_0}^{x}Xe^{-r_2t}\,dt$$

或簡化後，得：
$$y^*=\frac{1}{r_2-r_1}\int_{x_0}^{x}X[e^{r_2(x-t)}-e^{r_1(x-t)}]dt。\tag{I}$$

這個公式具有一般性，因其中函數 X 可以具有任何形式。

第二種情形 特徵方程 $r^2+pr+q=0$ 具有複數根 r_1 及 r_2。

在這種情形下，這些根是共軛的，我們乃有 $r_1=a-bi$，$r_2=a+bi$。上面所得到的公式(I)，可完全適用於這種情形，只須把它擺脫虛數形式，寫成實數形式就得了。

首先有：$r_2-r_1=2bi$。

然後，$e^{r_2(x-t)}=e^{(a+bi)(x-t)}=e^{a(x-t)}\cdot e^{ib(x-t)}$，故按歐拉公式，有
$$e^{r_2(x-t)}=e^{a(x-t)}[\cos b(x-t)+i\sin b(x-t)]。\tag{4}$$

因爲 r_1 與 r_2 的差別，只在於 i 前的正負號，故可以立即寫出：
$$e^{r_1(x-t)}=e^{a(x-t)}[\cos b(x-t)-i\sin b(x-t)]。\tag{5}$$

由(4)減去(5)，求得：
$$e^{r_2(x-t)}-e^{r_1(x-t)}=2ie^{a(x-t)}\sin b(x-t)。\tag{6}$$

最後，將所得結果代入公式(I)，乃有：
$$y^*=\frac{1}{b}\int_{x_0}^{x}Xe^{a(x-t)}\sin b(x-t)dt。\tag{II}$$

這個公式也具有一般性，且已擺脫了虛數形式。

第三種情形 特徵方程 $r^2+pr+q=0$，具有重根 $r_1=r_2=r=-\frac{p}{2}$。

爲得到我們所要的 y^* 的公式，可把這種情形作爲極限情形：在取極限以前，r_1 及 r_2 是不

相等的；而在取極限後，則 r_1 與 r_2 都等於 r。

把公式(I)寫爲：
$$y^*=\int_{x_0}^{x} X\cdot\frac{e^{r_1(x-t)}-e^{r_1(x-t)}}{r_2-r_1}\cdot dt,$$

我們看到：積分號內的比例式，乃函數 $e^{r(x-t)}$ 的增量對於自變量 r 的增量（當它從數值 r_1 變到 r_2 時所得到的增量）之比。按拉格蘭日中值定理（上册，第十四章），這個比值等於導數 $\frac{d}{dr}e^{r(x-t)}$ 在某數值 r^* 處 $(r_1<r^*<r_2)$ 的數值。所以取極限前，我們有：
$$y^*=\int_{x_0}^{x} X(x-t)e^{r^*(x-t)}\,dt。$$

當我們令特徵方程的兩個根 r_1 及 r_2 無限趨近於固定的數值 r 時，則中值 r^* 因爲它介於 r_1 及 r_2 之間，所以它也具有極限 r。因此，取極限後便得到我們所要的公式
$$y^*=\int_{x_0}^{x} X(x-t)e^{r(x-t)}dt,\quad r=-\frac{p}{2}。\qquad\text{(III)}$$

這就是當特徵方程具有相等的根時，非齊次方程(H)的特殊解 y^* 的公式。

習　題

求下列微分方程的一般解。

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=t+\frac{1}{2}$。　　答　$x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{9}+\frac{1}{18}$。
2. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=2t+1$。　　答　$x=C_1e^{3t}+C_1e^{-2t}-\frac{2t}{3}+\frac{1}{9}$。
3. $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+13x=39$。　　答　$x=e^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+3$。
4. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+7x=14$。　　答　$x=e^{2t}(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+2$。
5. $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=e^{2t}$。　　答　$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-\frac{e^{2t}}{3}$。
6. $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=e^{2t}$。　　答　$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+\frac{te^{2t}}{3}$。
7. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=9e^{3t}$。　　答　$x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{1}{2}e^{3t}$。
8. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=5\cos 2t$。　　答　$x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\cos 2t$。
9. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=3\cos 3t$。　　答　$x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{1}{2}t\sin 3t$。
10. $\frac{d^2x}{dt^2}-9x=5\cos 3t$。　　答　$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}-\frac{1}{3}\cos 3t$。
11. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=10\sin 3t$。　　答　$x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-2\sin 3t$。

12. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=8\sin 2t$。　答 $x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-2t\cos 2t$。

13. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}-3y=8\cos 2t$。　答 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-\dfrac{32}{65}\sin 2t-\dfrac{56}{65}\cos 2t$。

14. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+13x=30\sin t$。　答 $x=e^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+2\sin t-\cos t$。

15. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-2\dfrac{ds}{dt}+5s=10\sin t$。　答 $s=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+2\sin t+\cos t$。

16. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+5x=17\sin 2t$。　答 $x=e^{-t}(C_2\cos 2t+C_2\sin 2t)+$
$+4\cos 2t+\sin 2t$。

17. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4\dfrac{ds}{dt}+3s=4$。

18. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-6x=3t$。

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=x-2$。

20. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=3-2t$。

21. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{3t}$。

22. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$。

23. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-9s=e^{3t}$。

24. $2\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=\sin t$。

25. $4\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=4\sin\dfrac{t}{2}$。

26. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-16s=2\cos 4t$。

就下列各題，求特殊解，以滿足所給條件：

27. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4s=4$; $t=0$ 時，$s=1$，$\dfrac{ds}{dt}=0$。　答 $s=e^{2t}+e^{-2t}-1$。

28. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4s=8t$; $t=0$ 時，$s=0$，$\dfrac{ds}{dt}=4$。　答 $s=\sin 2t+2t$。

29. $\dfrac{d^2s}{dt^2}-3\dfrac{ds}{dt}=6$; $t=0$ 時，$s=1$，$\dfrac{ds}{dt}=1$。　答 $s=e^{3t}-2t$。

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=2e^{x}$; $x=0$ 時，$y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=1$。　答 $y=e^{x}$。

31. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=\sin 2t$; $t=0$ 時，$x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=0$。　答 $x=\dfrac{2}{3}\sin t-\dfrac{1}{3}\sin 2t$。

32. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=2\cos t$; $t=0$ 時，$x=2$，$\dfrac{dx}{dt}=0$。　答 $x=2\cos t+t\sin t$。

33. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-9y=2-x$; $y=0$，$\dfrac{dy}{dx}=1$ $(x=0)$。

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+x=4$; $x=4$，$\dfrac{dx}{dt}=2$ $(t=0)$。

35. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+x=e^{t}$; $x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=-2$ $(t=0)$。

36. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4s=4\sin t$; $s=4$，$\dfrac{ds}{dt}=0$ $(t=0)$。

37. $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=4$ $(t=0)$。

38. $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=4e^{2x}$; $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ $(x=0)$。

39. $\frac{d^2s}{dt^2}+s=\sin t+\cos 2t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$ $(t=0)$。

40. $\frac{d^2s}{dt^2}+s=e^{-t}+2$; $s=0$; $\frac{ds}{dt}=0$ $(t=0)$。

§114. 力學問題上的應用

許多物理及力學問題，可用本章中所講的方法來解決。例如，直線運動的問題，常可歸結爲一階或二階微分方程的問題，因而使這些問題的解法，依賴於上述微分方程的解。

首先，我們記得

$$v=\frac{ds}{dt},\quad j=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{ds}, \tag{1}$$

這裏 v 及 j 各是在某瞬時 t 的速度及加速度，而 s 是動點在所論瞬時沿其軌道到固定起點的距離。

例 1. 設在直線運動中，加速度反比於距離 s 的平方。當 $s=2$ 時，加速度等於 -1；且已知 $t=0$ 時，$v=5$ 及 $s=8$。

(a) 當 $s=24$ 時求 v：

解 按第一個條件，有：

$$加速度=j=-\frac{4}{s^2} \tag{2}$$

按(1)中最後一個等式，有：

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{4}{s^2}。 \tag{3}$$

分離變量，乘以 ds，再積分，得：

$$\frac{v^2}{2}=\frac{4}{s}+C，亦即\ v^2=\frac{8}{s}+C_1。 \tag{4}$$

按第二個條件，$v=5$，$s=8$。由此 $C_1=24$。因此，方程(4)可寫爲：

$$v^2=\frac{8}{s}+24。 \tag{5}$$

由此而得：若 $s=24$，則 $v=\frac{1}{3}\sqrt{219}=4.93$。

(b) 求上述動點從 $s=8$ 到 $s=24$ 所需要的時間。

解　就方程(5)解 v，得：

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{8}\frac{\sqrt{s+3s^2}}{s}\tag{6}$$

分離變數 s 及 t，在所給上下限 $s=8$ 及 $s=24$ 之間把 dt 積分，得到所求時間 T：

$$T=\frac{2}{2\sqrt{2}}\int_8^{24}\frac{sds}{\sqrt{s+3s^2}}=3.20。\tag{7}$$

註　可以先利用等式(1)中的第一等式，並寫 $\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{4}{s^2}$。再按§107［在那裏方程(F)具有這種形式］的方法來積這個方程。

當加速度 j 與距離成正比而正負號相反時，這種直線運動是很重要的一種。

在這種情形下，我們有：

$$j=-k^2s,\tag{8}$$

其中 k^2 爲單位距離時的加速度。

如果記得力及其所產生的加速度兩者（除常數因子外）是一致的，我們就會看到，作用在動點上的力恆朝向 $s=0$ 點，而其大小則正比於距離 s。這種運動稱爲簡諧振動。

應用等式(1)，由(8)可得：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+d^2s=0,\tag{9}$$

它是一個常係數二階線性方程。積分後（參閱前節中例2），得到一般解：

$$s=C_1\cos kt+C_2\sin kt。\tag{10}$$

微分這個等式，乃有：

$$v=k(-C_1\sin kt+C_2\cos kt)。\tag{11}$$

不難看到，公式(10)所定出的運動，是以 $\frac{2\pi}{k}$ 爲週期的週期性振動。這振動是在下面兩個邊界位置之間作的。

$$s=+\sqrt{C_1^2+C_2^2}\ 及\ s=-\sqrt{C_1^2+C_2^2}。$$

實際上，我們可以用另外兩個常數 A 及 B，來代替常數 C_1 及 C_2，得到

$$C_1=B\sin A \text{ 及 } C_2=B\cos A, \tag{12}$$

於是有：

$$s=B\sin(kt+A), \tag{13}$$

這時顯然，$B=+\sqrt{C_1^2+C_2^2}$，又 s 是 t 的週期函數，其週期為 $\frac{2\pi}{k}$。

在下面的一些例子中，我們將講述簡諧振動受外力干擾的情形。在所有這些情形中，問題或依賴於前面所研究的齊次方程(G)，或依賴於非齊次方程(H)的解。

例 2. 已知直線運動 $j=-\frac{5}{4}s-v$；當 $t=0$ 時，$v=2$，$s=0$。

(a) 求運動方程(亦即將 s 表達為 t 的函數)。

解　由等式(1)，得：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ds}{dt}+\frac{5}{4}s=0。 \tag{14}$$

這是齊次方程(G)。特徵方程是 $r^2+r+\frac{5}{4}=0$。它具有根：$r_1=-\frac{1}{2}+i$，$r_2=-\frac{1}{2}-i$。因此方程(14)的一般解是：

$$s=e^{-\frac{t}{2}}(C_1\cos t+C_2\sin t)。 \tag{15}$$

因為 $t=0$ 時，我們應有 $s=0$，故 $C_1=0$；所以我們有：

$$s=C_1e^{-\frac{t}{2}}\sin t。 \tag{16}$$

對 t 微分，以求 v，我們得：

$$v=C_2e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{\sin t}{2}+\cos t\right)。 \tag{17}$$

因 $t=0$ 時，我們應有 $v=2$，故 $C_2=2$。

所以運動方程是：

$$s=2e^{-\frac{t}{2}}\sin t。 \tag{18}$$

(b) t 為何值時，我們有 $v=0$?

解　公式(17)告訴我們，當 $v=0$ 時，括號內的式子應等於零。令其等於零，即得：

$$\tan t=2。 \tag{19}$$

所以我們應有：

$$t=1.10+n\pi \quad (n \text{ 為整數}) \tag{20}$$

公式(20)中，t 的兩個相接連的數值，恆差一個 π。

討論　這個例子說明一種減幅的諧振動。事實上，在原來的方程 $j=-\frac{5}{4}s-v$ 中，加速度是兩個分量之和：

$$j_1=-\frac{5}{4}s \text{ 及 } j_2=-v。\tag{21}$$

對應於分量 j_1 的簡諧運動，受那給出加速度 j_2 的減幅力的干擾，這個減幅力就是正比於速度的力，其方向與運動方向相反。這個減幅力有兩個效果：

第一，減幅力延長了相繼的 $v=0$ 點的兩個位置之間的時間。因爲，就簡諧振動 $j_1=-\frac{5}{4}s$ 而言，與(8)相比，可知 $k=\frac{1}{2}\sqrt{5}=1.12\cdots$。這時，半個週期是 $0.89\cdots\pi$，而在減幅諧振動的情形下，所對應的時間是 π。

第二，兩個相繼的 $v=0$ 的邊界位置之間的距離 s，本來是常量，現在卻形成了帶減等比遞數，其證明從略。

例 3. 已知直線運動爲：

$$j=-4s+2\cos 2t,\tag{22}$$

當 $t=0$ 時，$s=0$，$v=2$。

(a)求運動方程。

解 由公式(1)，我們有：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t。\tag{23}$$

所需要的特殊解已經在§112 例6中求到了。因此有：

$$s=\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t。\tag{24}$$

(b) t 爲何值時，我們有 $v=0$?

解 微分(24)，以求 v，並令結果等於零。我們得到：

$$(2+t)\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=0\tag{25}$$

或用 $\cos 2t$ 來除，得：

$$\frac{1}{2}\tan 2t+2+t=0。\tag{26}$$

這個方程的根，可用上册第十二章的方法來出。圖 109 表示了曲線：

$$y=\frac{1}{2}\tan 2t,\ y=-2-t,\tag{27}$$

其交點橫坐標的近似值爲：

$$t_1=0.88,\ t_2=2.36 \text{ 等等。}$$

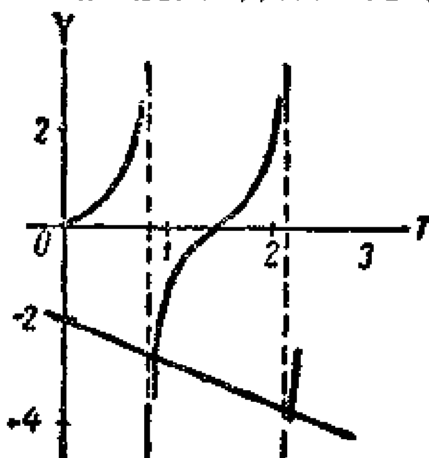


圖 109.

討論 這個例子說明了強迫諧振動。實際上，在(22)中，分量 j 爲兩個分量的和：

$$j_1=-4s \text{ 及 } j_2=2\cos 2t。$$

對應於分量 j_1 且週期爲 π 的簡諧振動，現在受產生加速度 j_2 的力的干擾；這個力是週期性的，其週期($=\pi$)與未受干擾的簡諧振動的週期相同。這種干擾力有兩個效果：

第一，兩個相鄰的 $v=0$ 的位置之間的時間，已經不是常量，而是逐漸減少且趨近於 $\frac{\pi}{2}$ 的了。這種事實可由附圖看出來。

第二，兩個相鄰的 $v=0$ 的邊界位置之間的距離 s，現在逐漸增加着了，其絕對值無限增大。

習 題

下面各題中，已知加速度及初始條件，試求運動方程：

1．$j=-4s$；$s=0$，$v=10$ $(t=0)$。 答 $s=5\sin 2t$。

2．$j=-4s$；$s=8$，$v=0$ $(t=0)$。 答 $s=8\cos 2t$。

3．$j=-4s$；$s=2$，$v=10$ $(t=0)$。 答 $s=2\cos 2t+5\sin 2t$。

4．$j=-s+k$；$s=0$，$v=0$ $(t=0)$。 答 $s=k(1-\cos t)$。

5．$j=-2v-5s$；$s=5$，$v=-5$ $(t=0)$。 答 $s=5e^{-t}\cos 2t$。

6．$j=-2v-5s$；$s=0$，$v=12$ $(t=0)$。 答 $s=12e^{-t}\sin 2t$。

7．$j=\sin 2t-s$；$s=0$，$v=1$ $(t=0)$。 答 $s=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t$。

8．$j=\sin 2t-4s$；$s=0$，$v=0$ $(t=0)$。 答 $s=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t$。

9．$j=-\frac{s}{4}$；$s=0$，$v=4$ $(t=0)$。

10．$j=9(1-s)$；$s=0$，$v=0$ $(t=0)$。

11．$j=-4v-5s$；$s=0$，$v=5$ $(t=0)$。

12．$j=\cos t-4s$；$s=0$，$v=0$ $(t=0)$。

13．$j=\cos 2t-4s$；$s=0$，$v=0$ $(t=0)$。

14．$j=-4v-13s$；$s=0$，$v=6$ $(t=0)$。

15．一質點的加速度爲 $j=-4s+3\sin t$。

(a)若質點由原點自靜止狀態開始運動，求其運動方程。

(b)質點離原點的最大距離可以是多少？ 答 $s=\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$。

16．若加速度爲 $j=-4s-8\sin 2t$，試回答前題中的問題。

答 (a)$s=2t\cos 2t-\sin 2t$；(b)$s=2t\cos 2t+\sin 2t$。

17．一物體受其自身重量的作用及一正比於速度的小阻力的作用，由靜止狀態下墜，證明下列各關係式：

$$j=g-kv,$$

$$v=\frac{g}{k}(1-e^{-kt}),$$

$$s=\frac{g}{k^2}(kt+e^{-kt}-1),$$

$$ks+v+\frac{g}{k}\left(1-\frac{kv}{g}\right)=0。$$

18. 一物體自靜止狀態下墜 80 呎;試應用 $j=32-v$ 求時間。　　答 3.47 秒。

19. 船在靜水行駛,所受的滯阻力,與其相應時刻的速度成比例。試證停車 t 秒後船的速度爲 $v=ce^{-kt}$,其中 c 爲停車時船的速度。

20. 一船在靜水面上隨風飄流,其某時刻的速度爲每時四哩;一分鐘後,速度爲每時 2 哩。求船所經過的距離。

21. 在某些條件下,電流計指針偏斜的方程爲:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\mu\frac{d\theta}{dt}+k^2\theta=0。$$

試證若 $\mu>k$,則指針能到零點。試求:當 $\mu<k$ 時的完全的解。

§115. 常係數 n 階線性微分方程

齊次方程　其形式爲:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_ny=0, \tag{K}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都是常數。

作置換 $y=e^{rx}$,左邊得:

$$(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n)e^{rx}。$$

當而且僅當 r 的值滿足方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0 \tag{1}$$

時,上面的表達式方爲零。這個方程(1),稱爲微分方程(K)的特徵方程。假若 r 是特徵方程的根,則 e^{rx} 是微分方程(K)的解。

特徵方程(1)的根,產生微分方程(K)的特殊解;這與二階方程的情形,完全一樣。這裏一點新的東西都沒有。我們立即可寫出方程(K)的積分法則,其證明見較詳盡的教本。

解微分方程(K)的法則

第一步　寫出特徵方程:

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0。 \tag{1}$$

第二步 完全解出特徵方程的根，求出其實根、虛根、及單根、重根，共 n 個。

第三步 按下列的規律，就特徵方程的各個根，作出對應的特殊解。

特徵方程 —— 微分方程

(a) 每一個實根 r_1 —— 給出了 —— 特殊解 $e^{r_1 x}$；

(b) 每一對共軛虛根 $a\pm bi$ 給出了兩個特殊解 $e^{ax}\cos bx$ 及 $e^{ax}\sin bx$；

(c) s 重根 —— 給出了 —— s（或 $2s$）個特殊解，係由特殊解 (a)[或(b)] 乘 $1, x, x^2, \cdots, x^{s-1}$ 而得。

第四步 將所得 n 個獨立解❶，各乘以任常量後相加。這個和，就是微分方程一般的解。

例 1. 解
$$\frac{dy^3}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0。$$

解 應用上述法則：

第一步 寫出特徵方程：
$$r^3-3r^2+4=0。$$

第二步 解之，其根為 $-1, 2, 2$。

第三步 (a) -1 的根，給出了特殊解 e^{-x}；(c) 重根 2 給出了兩個特殊解：
$$e^{2x} \text{ 及 } xe^{2x}。$$

第四步 一般解是
$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}。$$

例 2. 解方程
$$\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+5y=0。$$

解 應用上述法則：

第一步 特徵方程為：
$$r^4-4r^3+10r^2-12r+5=0。$$

第二步 解之，其根為 $1, 1, 1\pm 2i$。

第三步 (b) 一對虛根 $1\pm 2i$，給出了兩個特殊解：$e^x\cos 2x$ 及 $e^x\sin 2x$。(c) 二重根 1，給出了兩個特殊解：e^x 及 xe^x。

---

❶ 做完前三步，應得 n 個線性獨立的解，由此可查核所算是否有誤。如果做得不錯，那就應當恰好得到 n 個線性獨立的解。

第四步 一般解爲

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^x\cos 2x+C_4e^x\sin 2x。$$

亦即

$$y=e^x(C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)。$$

非齊次方程 其形式如下：

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_ny=X, \qquad \text{(L)}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 爲常數，X 只是 x 的連續函數。

由 §110 我們已經經知道，非齊次方程 (L) 的一般解 y 可寫爲：

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n+y^*, \qquad (2)$$

其中 $C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n$ 爲齊次方程(K)的一般解，其求法已經是我們熟悉了的；尾項 y^* 乃非齊次方程 (L) 的任一個特殊解。

這樣，所要做，只是求方程 (L) 的任一個特殊解 y^*。但這裏，右邊的 X 是任意的連續函數，這就非常難了。

可是，當函數 X 具有特殊形式時，如 §122 中的形式，則求特殊解 y^* 就非常容易。在這種情形，可以把我們對二階方程所做的種種，全應用到 n 階方程(L)上來，一樣有效。這是下面的這些情形：

(1)函數 X 是 x 的多項式 $P(x)$。

(2)函數 X 爲多項式 $P(x)$與指數函數 e^{ax} 的乘積 $P(x)e^{ax}$。

(3)函數 X 爲乘積 $P(x)\cos bx$ 或 $P(x)\sin bx$，其中 $P(x)$爲多項式。

在這三種情形，特殊解 y^* 的決定，如例子中已指出的，是應用未定係數法來做的。

在這些情形，也可以遵循下列法則。

求特殊解 y^* 的法則。

第一步 逐次微分所給方程(L)，或者直接，或者利用消去法以得新的微分方程。雖然所得微分方程的階數 m，是高一些的，但是它是齊次的，亦即屬於(K)的類型。

第二步 按照解齊次方程的法則，解這個新的微分方程，並將它的

一般解寫爲下面的形式：

$$(C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n)+C_{n+1}Y_{n+1}+\cdots+C_mY_m$$

這裏寫在括號中的和，是原來的齊次方程（亦即用零代所給方程中的函數 X 後所得的方程）的一般解。

第三步　將表達式 $C_{n+1}Y_{n+1}+\cdots+C_mY_m$ 代入所給的方程(L)中，令所得恆等式左右兩邊同類項的係數相等，由此決定常數 $C_{n+1}^{(0)}, \cdots, C_m^{(0)}$，再把這些常數代入表達式 $C_{n+1}Y_{n+1}+\cdots+C_mY_m$ 中。這個表達式

$$y^*=C_{n+1}^{(0)}Y_{n+1}+\cdots+C_m^{(0)}Y_m$$

就是我們所要求的所給方程(L)的一個特殊解。

我們用例子來說明這個方法。

註　我們要注意：新的微分方程的特徵方程的左邊部分，恆可以被原來的微分方程的特徵方程的左邊部分除盡，故新的特徵方程的解法可以大大簡化。

例　解
$$y''-3y'+2y=xe^x。\tag{3}$$

解　特徵方程爲 $r^2-3r+2=0$。其根爲 2，1，故對應的齊次方程的一般解爲：

$$C_1e^{2x}+C_2e^x。\tag{4}$$

第一步　微分(3)：

$$y'''-3y''+2y'=xe^x+e^x。\tag{5}$$

從(5)減去(3)，得❶：

$$y'''-4y''+5y'-2y=e^x。\tag{6}$$

再微分，得：

$$y^{IV}-4y'''+5y''-2y'=e^x。\tag{7}$$

從(7)減去(6)，得：

$$y^{IV}-5y'''+9y''-7y'+2y=0。\tag{8}$$

這已經是(K)型的方程，也就是說，已經是齊次方程了。

第二步　解(8)。其特徵方程爲：$r^4-5r^3+9r^2-7r+2=0$。其左邊部分，應當能被所設的非齊次方程(3)的特徵方程的左邊除盡。實際上，除一下，我們有：

---

❶ 我們可以放心大胆做這個減法，因爲將所設微分方程微分任意次後所得的新的方程，恆包含原來的方程的所有的解。因此，新的和舊的方程可以相加或相減，以組成另外的方程。

$$r^4-5r^3+9r^2-7r+2=(r^2-3r+2)(r-1)^2。$$

故，特徵方程

$$r^4-5r^3+9r^2-7r+2=0。\tag{9}$$

的根為 1, 1, 1, 2。因此方程(8)的一般解是：

$$(C_1e^{2x}+C_2e^x)+C_3xe^x+C_4x^2e^x。\tag{10}$$

第三步　比較(10)及(4)，我們看到，當任意常量 C_3 及 C_4 取得適當的數值 $C_3^{(0)}$ 及 $C_4^{(0)}$ 時，

$$y^*=C_3^{(0)}xe^x+C_4^{(0)}x^2e^x。\tag{11}$$

是微分方程(3)的特殊解之一：

為了求 $C_3^{(0)}$ 及 $C_4^{(0)}$，微分(11)兩次，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy^*}{dx}=C_3^{(0)}(xe^x+2e^x)+C_4^{(0)}(x^2e^x+2xe^x)\\ \text{及}\quad&\frac{d^2y^*}{dx^2}=C_3^{(0)}(xe^x+2e^x)+C_4^{(0)}(x^2e^x+4xe^x+2e^x)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

將(11)及(12)代入方程(3)，兩邊消去 e^x，歸併同類項後，得：

$$-2C_4^{(0)}x+2C_4^{(0)}-C_3^{(0)}=x。\tag{13}$$

令 x 同冪項的係數相等，乃有 $-2C_4^{(0)}=1$，及 $2C_4^{(0)}-C_3^{(0)}=0$。由此得 $C_3^{(0)}=-1$ 及 $C_4^{(0)}=-\frac{1}{2}$。代入(11)，得：

$$y^*=-xe^x\left(1+\frac{1}{2}x\right)。\tag{14}$$

這就是方程(3)的特殊解，其一般解為：

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^x-xe^x\left(1+\frac{x}{2}\right)。$$

§116. 格拉蘭日的變化常量法

這個方法，是用來求微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=X,\tag{L}$$

的特殊解 y^* 的，這時須已知齊次方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0。\tag{K}$$

的一般解

$$C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n。\tag{1}$$

像 §111 中關於二階方程所作的一樣，用拉格蘭日法，一開始就寫出 n 個未知函數 C_1', C_2', …, C_n' 的 n 個聯立線性方程：

$$\left.\begin{aligned}
C_1'Y_1+\quad C_2'Y_2+\cdots+\quad C_n'Y_n&=0\\
C_1'Y_1'+\quad C_2'Y_2'+\cdots+\quad C_n'Y_n'&=0\\
C_1'Y_1''+\quad C_2'Y_2''+\cdots+\quad C_n'Y_n''&=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
C_1'Y_1^{(n-2)}+C_2'Y_2^{(n-2)}+\cdots+C_n'Y_n^{(n-2)}&=0\\
C_1'Y_1^{(n-1)}+C_2'Y_2^{(n-1)}+\cdots+C_n'Y_n^{(n-1)}&=X
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

這個代數方程組(2),決定未知量 $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ 爲 x 的函數。把這些函數作爲 x 的某些函數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的導數,用簡單的積分,我們就能求出它們來:

$$C_1=\int C_1'dx,\ \ C_2=\int C_2'dx,\cdots,\ \ C_n=\int C_n'dx。$$

這樣決定了 x 的 n 個函數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 後,我們取表達式:

$$y^*=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n。\qquad(3)$$

我們再證明,它一定是所給的非齊次微分方程(L)的特殊解。

事實上,寫出表達式(3),再將它微分 n 次,利用代數方程(2)得:

$$\left.\begin{aligned}
y^*&=\quad C_1Y_1+\quad C_2Y_2+\cdots+C_nY_n\\
\frac{dy^*}{dx}&=\quad C_1Y_1'+\quad C_2Y_2'+\cdots+C_nY_n'\\
\frac{d^2y^*}{dx^2}&=\quad C_1Y_1''+\quad C_2Y_2''+\cdots+C_nY_n''\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d^{n-1}y^*}{dx^{n-1}}&=C_1Y_1^{(n-1)}+C_2Y_2^{(n-1)}+\cdots+C_nY_n^{(n-1)}\\
\frac{d^ny^*}{dx^n}&=\quad C_1Y_1^{(n)}+\quad C_2Y_2^{(n)}+\cdots+C_nY_n^{(n)}+X
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

這些方程依次乘以 $p_n, p_{n-1}, \cdots, p_1, 1$,加起來,即得:

$$\frac{d^ny^*}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y^*}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy^*}{dx}+p_ny^*=X。\qquad(5)$$

因爲 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 爲齊次方程(K)的特殊解,故把各行相加時,都得到零。因此,由公式(3)所決定的 y^*,乃所給方程(L)的特殊解。

我們注意,這裏的係數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 及右邊的函數 X,可以是自變量 x 的任意的連續函數。

習 題

求下列各微分方程的一般解:

1. $\frac{d^4s}{dt^4}+3\frac{d^2s}{dt^2}-4s=0$。　　答 $s=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t$。

2. $\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^2x}{dt^2}=0$。 答 $x=C_1+C_2t+C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}$。

3. $\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-12\frac{dx}{dt}=0$。 答 $x=C_1+C_2e^{3t}+C_3e^{-4t}$。

4. $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx}=0$。 答 $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$。

5. $\frac{d^5s}{dt^5}-4\frac{ds}{dt}=0$。 答 $s=C_1+C_2e^{\sqrt{2}t}+C_3e^{-\sqrt{2}t}+C_4\cos\sqrt{2}\cdot t+C_5\sin\sqrt{2}\cdot t$。

6. $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}-8y=0$。 答 $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}\cdot x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$。

7. $\frac{d^4\rho}{d\theta^4}-12\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+27\rho=0$。 答 $\rho=C_1e^{3\theta}+C_2e^{-3\theta}+C_3e^{\sqrt{3}\theta}+C_4e^{-\sqrt{3}\theta}$。

8. $\frac{d^3s}{dt^3}+3\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+s=0$。 答 $s=e^{-t}(C_1+C_2t+C_3t^2)$。

9. $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$。 答 $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x$。

10. $\frac{d^4s}{dt^4}+3\frac{d^3s}{dt^3}+3\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ds}{dt}=0$。 答 $s=C_1+e^{-t}(C_2+C_3t+C_4t^2)$。

11. $\frac{d^4y}{dx^4}+2n^2\frac{d^2y}{dx^2}+n^4y=0$。 答 $y=(C_1+C_2x)\cdot\cos nx+(C_3+C_4x)\sin nx$。

12. $\frac{d^3s}{dt^3}=s$。 答 $s=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$。

13. $\frac{d^3\rho}{d\theta^3}-2\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\frac{d\rho}{d\theta}=e^\theta$。 答 $\rho=C+e\theta\left(C_2+C_3+\frac{\theta^2}{2}\right)$。

14. $\frac{d^4y}{dx^4}=y+x^3$。 答 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^3$。

15. $\frac{d^3s}{dt^3}-\frac{d^2s}{dt^2}-6\frac{ds}{dt}=6$。 答 $s=C_1+C_2e^{3t}+C_3e^{-2t}-t$。

16. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=xe^{nx}$。 答 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{xe^{nx}}{n^2-3n+2}-\frac{(2n-3)e^{nx}}{(n^2-3n+2)^2}$。

17. $\frac{d^2s}{dt^2}-9\frac{ds}{dt}+20s=t^2e^{3t}$ 答 $s=C_1e^{4t}+C_2e^{5t}+\frac{e^{3t}(7+6t+2t^2)}{4}$。

18. $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=t\sin^2 t$。 答 $s=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\frac{t}{8}-\frac{t\cos 2t}{32}-\frac{t^2\sin 2t}{16}$。

19. $\frac{d^4s}{dt^4}-5\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$。

20. $\frac{d^4s}{dt^4}+5\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$。

21. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2-8$。

22. $\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$。

雜 题

求下列微分方程的一般解:

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{2x+1}=0$。 答 $Ce^{\frac{1}{y}}=2x+1$。

2. $8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=27y$。 答 $y=(x+c)^{\frac{3}{2}}$。

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-27y^2=0$。 答 $y=(x+c)^3$。

4. $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=9x$。 答 $y=x^{\frac{3}{2}}+c$。

5. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=5\sin 3t-10\cos 3t$。 答 $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+2\cos 3t-\sin 3t$。

6. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=4e^{2t}+4t^2$。 答 $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\frac{1}{2}e^{2t}+t^2-2$。

7. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=16-5\sin 3t$。 答 $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\sin 3t+4$。

8. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=8e^{2t}+15\sin\frac{t}{2}$。 答 $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{2t}+4\sin\frac{t}{2}$。

9. $y\,dx+(x+y)dy=0$。 答 $y^2+2xy=C$。

10. $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{t}=0$。 答 $s=\frac{t^2}{3}+\frac{c}{t}$。

11. $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{4}{s^3}$。 答 $C_1s^2=(C_1t+C_2)^2+4$。

12. $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy-y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot dx+x\,dx=0$。 答 $Cx=e^{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$。

13. $\frac{ds}{dt}+s\tan t=\tan t$。 答 $s=1+C\cos t$。

14. $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-6y=6e^{4t}-8e^{-t}$。 答 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}+e^{4t}+2e^{-t}$。

15. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=4e^{3t}-12$。 答 $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+te^{3t}+4$。

16. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+5x=5e^{2t}-11e^{-t}$。 答 $x=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+e^{2t}+\frac{11}{8}e^{-t}$。

17. $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$。 答 $Cx=x^2-y^2$。

18. $\frac{ds}{dt}+2st=t^3$。 答 $s=\frac{1}{2}(t^2-1)+Ce^{-t^2}$。

19. $2\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$。 答 $y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)$。

20. $\frac{ds}{dt}+\frac{2st}{t^2+1}=\frac{1}{t}$。

21 $\frac{d^2s}{dt^2}+4\frac{ds}{dt}+13s=4\cos 3t-12\sin 3t$。

22. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-6x=-5e^{-2t}-6t-18$。

23. $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ds}{dt}-6s=5t+\sin t$。

24. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=3x^2y^{\frac{4}{3}}$。

25. $3\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x+1}=\frac{x^3}{y^2}$。

26. $(4y+3x)\frac{dy}{dx}+y=2x$。

27. $x^2y\,dx-(x^3+y^3)dy=0$。

28. $\frac{dy}{dx}+y\tan x=1$。

利用所給變換解下列微分方程:

29. $t^2\frac{ds}{dt}-2st-s^3=0$。　設 $s=\frac{t^2}{v}$。　答 $\frac{t^4}{2s^2}+\frac{t^3}{3}=C$。

30. $(t^2+t)ds=(t^2+2st+s)dt$。　設 $s=vt$。　答 $s=Ct(1+t)-t$。

31. $(3+2s)s\,dt=(3-2st)t\,ds$。　設 $st=v$。

32. $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=2x+2y+5$。　設 $x+y=v$。

第九章　重積分

§117.　二元積分和

我們已經知道，所謂積分和乃下面的和：

$$S=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

它是按下面的法則做成的：

第一步　將所給線段$[a,b]$分為n個小線段：

$$[a=x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_i,\ x_{i+1}],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ b=x_n]。$$

第二步　從這n個小線段中，各任取一點：

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_i,\ \cdots,\ \xi_{n-1}。$$

第三步　作成n個乘積$f(\xi_i)\Delta x_i$；它是每個小線段的長跟連續函數$f(x)$在該線段上所選取點處的數值相乘而得的。

第四步　把所得的乘積都加起來。

這種積分和，我們稱它為簡單積分和或一元積分和。

完全按同樣的法則，也可以做成所謂二元積分和。這是我們馬上就要講的。

設想在XOY平面上有某條自己不相交割的封閉曲線C。平面XOY上位於該曲線內及曲線上的全體點，稱為封閉區域D。封閉一詞的意義就是說：在所討論的那一批點中，包括了區域邊界曲線C上的點。若不包括這些點，區域D就叫開區域[1]。不難看出，封閉區域及開區域這兩個概念，是跟線段（閉區間）及區間（開區間，即沒有端點的線段）那兩個概念相類似的。

設在封閉區域D中，給定了兩個自變量x及y的連續函數$f(x,y)$。這就是說，對於區域D內或其邊界（即曲線C）上的每一點$M(x,\ y)$，都

---

[1] 以後的課文中，在不致引起含混的地方，也就是，在讀者很易於看出所講的是封閉區域還是開區域的地方，我們只說"區域"。

對應了連續函數$f(x, y)$的一個完全確定了的數值。

定義 二元積分和乃下面的和

$$f(M_0)\cdot\sigma_0+f(M_1)\cdot\sigma_1+\cdots+f(M_i)\cdot\sigma_i+\cdots+f(M_{n-1})\cdot\sigma_{n-1},$$

它的作法如下:

第一步 將所給封閉區域D分為n塊小面積$\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$(圖110),其次序是任意的。

圖 110.

第二步 在這n塊小面積內各取一點:$M_0, M_1, \cdots, M_i, \cdots, M_{n-1}$,每次都應取在小塊面積內或其圍線上。

第三步 作n個乘積

$$f(M_0)\cdot\sigma_0, f(M_1)\cdot\sigma_1, f(M_2)\cdot\sigma_2, \cdots, f(M_i)\cdot\sigma_i, \cdots, f(M_{n-1})\cdot\sigma_{n-1},$$

這是將小面積的值乘以函數$f(x, y)$在該面積上所取點處的數值而得到的n個乘積。為簡便起見,我們用$f(M)$表示函數$f(x, y)$在$M(x, y)$點處的數值。

第四步 把所得的乘積都加起來:

$$S=f(M_0)\cdot\sigma_0+f(M_1)\cdot\sigma_1+\cdots+f(M_i)\cdot\sigma_i+\cdots+f(M_{n-1})\cdot\sigma_{n-1}。$$

顯然,就所給的區域D及所給的連續函數$f(x, y)$,可作成無窮多個這種積分和,而不只是一個積分和,因為區域D可按各種方法來分為小面積,又可按各種方式來選取小面積中的點。於是讀者可以看到:積分和S的數值,依賴於下面兩種情況:

(1)依賴於區域D劃分為小面積的分法;

(2)依賴於各小面積中的點的取法。

§118. 二元積分和的幾何意義

我們已看到,簡單(一元)積分和S具有極簡單的幾何意義:它是梯階形的面積(圖111)。這梯階形是由許多矩形組成的;其中各矩形的底

是線段 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$；高是$f(\xi_0), f(\xi_1), \cdots, f(\xi_{n-1})$，也就是所論函數 $f(x)$在所選取的點 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ 處的數值。

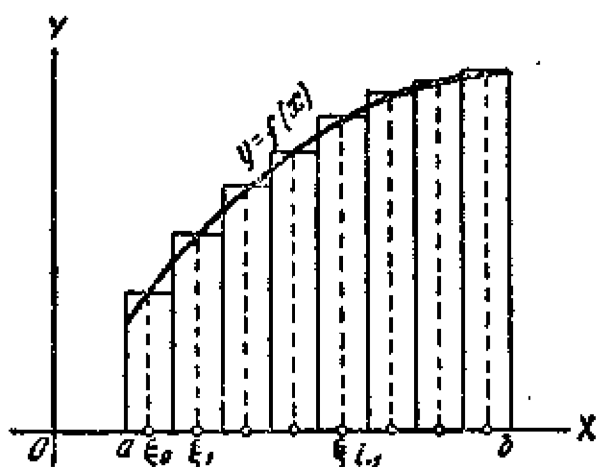


圖 111.

我們也可以講出二元積分和 S 的幾何意義來。

爲此，設想三度空間 $OXYZ$ (圖 112)中的連續曲面，其方程爲

$$z=f(x,y),$$

其中 $f(x,y)$是所給封閉區域 D(以圍線 C 爲界)上的連續函數。

這個圍線 C 是在 XOY 平面上的。假若通過 C 上的點引直線垂直於平面 XOY，且只讓這些直線往上引到跟所給曲面相交爲止，那樣我們就得到一個柱體，它的母線都平行於 OZ 軸，它的下底面是平面區域 D，它的上頂則是一塊曲面(由封閉圍線 C' 所圍成)。

設想區域 D 分成了 n 個小面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$。如果我們在每個小面積的界線上，也同樣都作直線垂直於 XOY 平面，而且也只讓它們作到跟曲面相交爲止，那我們就有 n 個細長的柱體，它們的母線都平行於 OZ 軸。這些柱體的底是平面面積 σ_i，它們的上頂是所給曲面上的小塊，而且都在曲面上的封閉圍線 C' 之內(圖 112)。顯然，所有這 n 個細長柱體的體積和，恰好就等於整個柱體的體積。

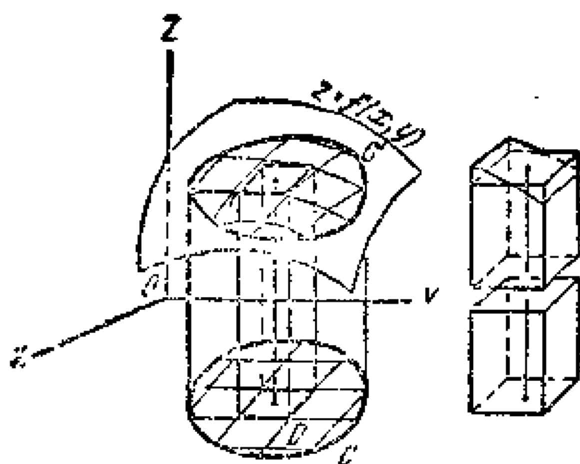


圖 112.

現在我們從每個小平面區域 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$。中各取一點：$M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$。假若

由每一個這種點 M_i，作直線垂直於 XOY 平面，且只讓它剛好作到跟曲面相交爲止，又假若通過這條直線的端點(在該曲面上)，作平面平行於水平面 XOY，那麼現在就得到上下底都是平行平面的柱體了。該柱體的下底爲小面積 σ_i，其上頂的大小與形狀完全跟面積 σ_i 相同，只不過升到一高處罷了；這個高度等於函數 $f(x)$在 M_i 點的數值，亦即 $f(M_i)$。此外，各柱體的母線自然是平行於 OZ 軸的，也就是說，是垂直的。

爲方便起見，我們把這個以平面爲上下底的柱體稱爲"小直柱"。顯然，這個豎在面積 σ_i 上的小直柱，或者內接於 σ_i 上的曲頂面柱體，或者外接於它，也可能是介於這二者之間的。這一切完全要看 σ_i 中的點 M_i 是怎樣選擇的，要看點 M_i 是不是選擇得使 $f(M_i)$爲 σ_i 中函數 $f(x, y)$ 的最小數值，還是最大數值，還是中間數值（介於最大與最小數值之間)。

這樣，在每一個小面積 σ_i 上，都豎起了一個垂直的"小直柱"，其上下底是平行(水平)的。由初等幾何即知，直柱體的體積等於底面積乘高。隨之，所討論的小直柱的體積，剛好等於乘積 $f(M_i)\sigma_i$，因爲小直柱的底面積爲 σ_i，而高等於 $f(M_i)$。

假若現在我們在每一個小面積 σ_i 上，都豎起了這樣的細長直柱，我們就得到由 n 個小直柱所組成的梯階實體，其體積就作爲我們的積分和：$S=f(M_0)\sigma_0+f(M_1)\sigma_1+\cdots+f(M_i)\sigma_i+\cdots+f(M_{n-1})\sigma_{n-1}$。

這樣，二元積分和 S，在數值上是等於由 n 個小直柱所作成的梯階實體的體積的，這些小直柱的底面積爲 σ_i，高爲曲面的 Z 座標 $f(M_i)$。

§119. 二重(定)積分

我們知道，單元積分和是

$$S=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

在線段$[a,b]$所分成的諸小線段 Δx_0, Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_{n-1} 中，當最大的線段趨近於零時，單元積分和趨近於完全確定的極限。這時我們假定

了，函數在整個線段$[a,b]$上是連續的。此外，我們知道，單元積分和的這個極限，稱爲函數$f(x)$在線段$[a,b]$上的定積分，並記爲$\int_a^b f(x)dx$。

後來，我們又知道，這個定積分，實際上可按萊博尼茲-牛頓公式計算：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

其中$F(x)$表示了$f(x)$的原函數，亦即$F'(x)=f(x)$。

最後，我們又知道，定積分的幾何意義是：單重定積分，在幾何上表示了由線段$[a,b]$，其端點處的兩根縱坐標及已知曲線$y=f(x)$所包圍而成的面積$AabB$（圖113）。

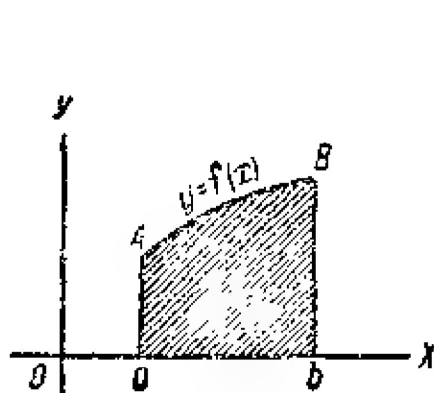


圖　113.

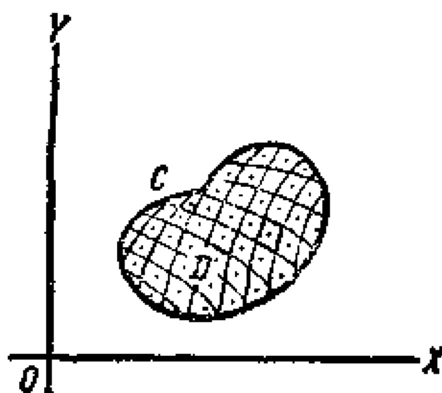


圖　114.

現在，我們來討論二元積分和：

$$S=f(M_0)\sigma_0+f(M_1)\sigma_1+\cdots+f(M_i)\sigma_i+\cdots+f(M_{n-1})\sigma_{n-1}\text{。}$$

圍線C之內的區域D被分爲小面積$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$（圖114）。假定這些小面積都隨時間變化，開始無限減小（指的不僅是面積減小的意思，而且是它們直徑❶減小的意思），使得它們的直徑中最大的也無

❶ 所謂平面圖形的直徑，乃其最大的弦。如115圖中，直徑顯然是弦d。假若隨着時間的推移，圖形的變化使得其直徑無限減小，那末，這意味着，該圖形向一點收縮。假若只是圖形的面積無限減小，則由此還不能說圖形必定縮於一點；因爲，圖形可變得很長，只要其厚度無限減薄。



圖　115.

限減小。這意味着，$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 這些面積變得愈來愈小。又因爲它們應塡滿圍線 C 內不變的面積，故它們的數目無限增大。另一方面，連續函數 $f(x, y)$ 是有界的，因此對於所有的點 $M(x, y)$，我們有不等式

$$|f(x,y)| < K,$$

其中 K 爲一常量。由此而知，二元積分的"一般項"的絕對值小於 $K\sigma_i$，這表示一般項是無限減小着的。

因此，當諸小面積 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 的直徑中的最大直徑無限減小時，二元積分和 S 就變成無限增多個無窮變小項的和。

在這些條件下，二元積分和 S，趨近於一個確定的極限；不論無窮減小着的諸面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 的形狀是怎樣的，也不論其中的點 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 是怎樣取出的，這極限恆相同。

我們不可能在這本書的範圍內，引入這個重要命題的證明。我們只能預告讀者，對於可直化曲線（即具有有限長度的曲線）所圍成的區域，這個定理的正確的，其證明可以在較深一些的數學分析書中找到。在§121 及 122 中，我們將講述該極限的實際計算法，這也足夠作爲斷定其存在的有力的根據。

二元積分和 S 的極限，稱爲二重定積分，其記法與單元積分的記法相類似，即

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy \text{。}$$

這個記號讀爲，"區域 D 上的二重積分，$f(x,y)dx, dy$"。

二重積分號 $\iint$ 下的字母 D，指出了積分法（也就是求和並取其極限法），是在整個區域 D 上作的。

註　二重定積分也具有像積分 $\int_a^b f(x)dx$ 那樣的記號，它總使我們一看就能想起，它所代表的是什麼表達式的極限。二元積分和

$$f(M_0)\sigma_0 + f(M_1)\sigma_1 + \cdots + f(M_{i-1})\sigma_{i-1} + \cdots + f(M_{n-1})\sigma_{n-1}$$

可以這樣組成，先假定諸面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 是矩形，是由平行於 OX 及 OY 軸的諸直線劃分

區域 D 而得到的(圖 116)。

我們總可以這樣假定,因爲積分和的極限,並不依賴於面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 的形狀,只要它們是無限減小(就直徑而言)就行了。但假若我們給面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 以上述矩形的形狀,則積分和的"一般項"可寫爲:

$$f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

因爲"一般的小塊面積"現在是由一些點 $M(x,y)$ 所組成的,這些點的橫坐標 x 滿足不等式 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$,其縱坐標滿足不等式 $y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}$。因此,它的面積應爲乘積 $\Delta x_i\,\Delta y_j$。

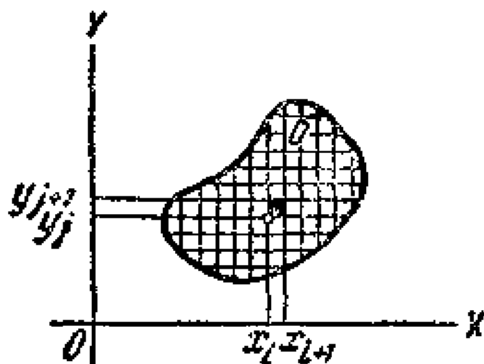


圖 116.

在這"一般的"小塊面積上取坐標爲 x_i, y_j 的點 M_{ij},亦即取該小塊面積左下角處的點,我們就得到積分和的一般項的形式爲 $f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$,故積分和可寫爲:

$$\underset{i}{S}\underset{j}{S} f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

其中第一個求和法是關於指標 j 的,這就給出了圍線 C 內的垂直的小條;而第二個求和法是關於指標 i 的,這就把這小條從左移到右,因此把圍線 C 的整個內部盤了一遍。

假若現在用 Δx 表示橫坐標的一般增量 Δx_i,而把縱坐標的一般增量 Δy_j 直接寫爲 Δy,則積分和可寫爲下面的形式:

$$SS\, f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y。$$

因此,積分和的極限(亦即二重積分),自然就要寫得好像在極限符號裏邊保留了積分和的某些痕跡似的。由此得到二重積分的記號:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy。$$

§120. 二重積分的幾何意義

由於前面講過了二元積分和的幾何意義,二重(定)積分的幾何意義就非常簡單了。我們已經看到,二元積分和表示了梯階體的體積,它是由直立的小直柱所組成的,這些小直柱的底面積是 σ_{i-1},高是曲面的 Z 坐標 $f(M_{i-1})$。

我們用 V 表示一直柱體的體積(圖 117)。該柱體的母線平行於 OZ 軸;下底爲 XOY 平面上的區域 D;上頂爲曲面形,就是曲面 $Z=f(x, y)$ 上蓋住了所論柱體上方的那一塊。假若將區域 D 作任意的一種劃分,

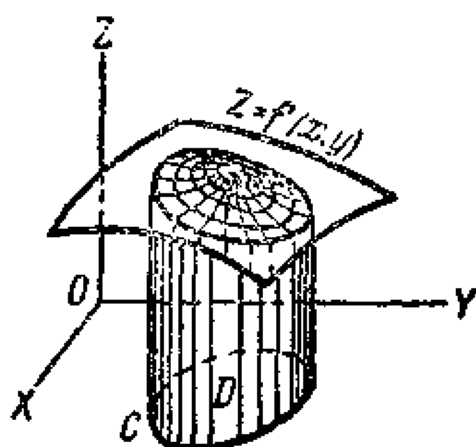


圖 117.

把它分爲小面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$，並從這些小面積中各取一點，$M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$，使得所對應的 Z 坐標 $f(M_i)$ 恆爲這塊小面積上函數 $f(x, y)$ 的最小值，則以 σ_i 爲底，$f(M_i)$ 爲高的小直柱，是內接於以 σ_i 爲下底，以曲面 $Z=f(x, y)$ 中的一片爲上頂的直柱體的。所以只要小直柱是它所內接的那個柱體的一部分，則小直柱的體積將小於該柱體的體積。因爲小直柱的體積爲 $f(M_i)\sigma_i$，故由此而知，所有 n 個小直柱的體積和，顯然等於積分和：

$$S=f(M_0)\sigma_0+f(M_1)\sigma_1+\cdots+f(M_{n-1})\sigma_{n-1}。$$

它是小於所有 n 個柱體之和的，而後者顯然等於整個大柱體的體積 V。因此，當 $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 取得使 Z 坐標爲最小時，我們求得 $S<V$；所以積分和 S 的極限，不可能大於 V。隨之

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy \leqslant V。$$

假若現在我們按另一種方法選擇 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 諸點，使得 Z 坐標 $f(M_i)$ 爲面積 σ_i 上的最大值，則顯然，所討論的小直柱[以 σ_i 爲底，$f(M_i)$ 爲高] 是外接於對應柱體的。所以，由這些小直柱所組成的梯階體，包含了整個大柱體。因爲梯階體的體積是積分和，因此當我們這樣選擇 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 諸點時，我們得到 $S>V$，故

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy \geqslant V。$$

把前面兩個不等式歸併起來，乃得：

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = V。$$

隨之，函數 $f(x,y)$ 在區域 D 上的二重積分，數值上是等於一個直立

柱體的體積的，該柱體的下底即爲區域 D，而其上頂爲曲體 $z=f(x,y)$。

我們注意，假若曲面 $z=f(x,y)$ 在 XOY 平面的下面，則二重積分及體積都是負的，因爲在這種情形下函數 $f(x,y)$ 是負的。

§121. 二重積分的計算法。矩形區域的情形

這種情形極其簡單，自然我們要從它開始，來計算二重積分。

取矩形 $PQTR$（圖 118）。所有矩形內的點的橫坐標 x，都介於 a, b 之間，又其縱坐標 y 介於 c, d 之間，亦即 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$。

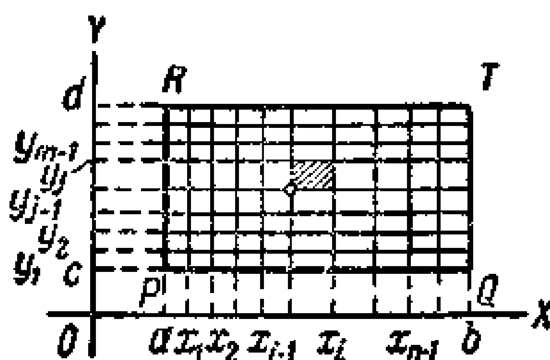


圖 118.

設函數 $f(x,y)$ 在該矩形內（包括圍線）是連續的。

爲計算二重積分

$$\iint\limits_{PQTR} f(x,y)\,dx\,dy,$$

自然要用平行於坐標軸的諸直線，把矩形 $PQTR$ 分爲許多小矩形。利用分點 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$，我們把 OX 軸上的線段 $[a,b]$ 分爲 n 個小線段，通過這些分點，各引直線平行於 OY 軸。同樣，利用分點 $c<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<d$，我們將 OY 軸上的線段分爲 m 個小線段，通過這些分點，各引直線平行於 OX 軸。

顯然，這樣就把矩形 $PQTR$ 分爲 $n\times m$ 個小矩形了，然後就這些矩形、我們作積分和。爲方便起見，我們取 M 點爲每一小矩形的左下角。這樣，在圖 118 中有陰影的矩形 $[x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}, y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}]$ 內，我們取 (x_i, y_j) 點。

我們將把這個矩形作爲"一般的"矩形，其面積顯然等於 $\Delta x_i\,\Delta y_j$。

因此積分和的"一般"項爲：

$$f(x_i,y_j)\Delta x_i\,\Delta y_j;$$

隨之，整個積分和爲：

$$\mathop{S}_{i=0}^{n-1}\mathop{S}_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j \text{。}$$

上面兩個求和法是同時進行的。但所討論的積分和是一個有限和；而在有限和中，求和的次序是可以隨意變化的。所以為計算這個積分和比較方便起見，我們可試用下列兩個方法來做。

第一法

先按變量 y 求和，然後再按變量 x 求和。

因為 y 的指標為 j，而 x 的指標為 i，故開始應按指標 j 求和，然後再按 i 求和。所以，我們有：

$$\mathop{S}_{i=0}^{n-1}[\Delta x_i \mathop{S}_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j)\Delta y_j]\text{。}$$

這時，我們注意，按指標 j 求和時，我們可以把因子 Δx_i 提到求和的符號外來，因為在這個部分和的一切項中，Δx_i 都是一樣的。

為方便起見，我們換另外的方式來寫這個二元積分和。將 x, y 的指標去掉，假定，這些變量不是連續變化而是跳躍着變化的，這時，x 跑過一系列的數值 $a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，$y$ 跑過 $c, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$。這樣，我們的二元積分和可寫為：

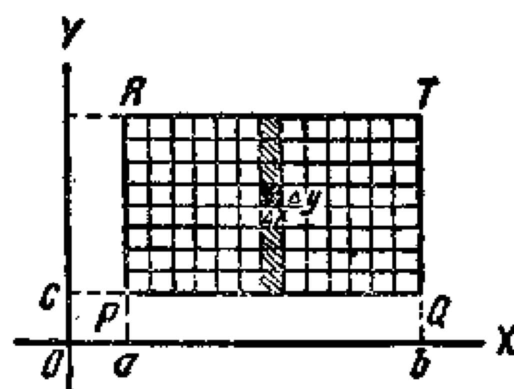


圖 119.

$$\mathop{S}_{a}^{b}[\Delta x \mathop{S}_{c}^{d} f(x, y)\Delta y]\text{。}$$

二元積分和中諸項的這種排列次序，從幾何上看來，表示了：一開始，是沿着垂直條來蒐集各項的，因為在第一個（裏面的）和中，x 是假定為常數的（圖 119）。然後當所有垂直條上的各項蒐集起來之後，我們就求第二個（外面的）和，這是把所有垂直條上的和再加起來，現在就必須變化 x 了。

現在我們令所有小矩形（$PQTR$ 所分成的小矩形）的直徑同時無限

變小。我們知道，二元積分和將趨近於一個完全確定的極限，這個極限就是在矩形 $PQTR$ 上的二重積分：

$$\iint\limits_{PQTR} f(x, y)dx\,dy 。$$

因爲各矩形無限減小時可以隨着我們的意思來減小，故我們可以首先令這些矩形的高 Δy 無限減小，而保持其底邊 Δx 不變❶。但由於第一個和顯然是單元積分和，故當各矩形的高 Δy 這樣趨於零時，這個和的極限是單積分

$$\int_c^d f(x, y)dy 。$$

這個積分是在上下限 d, c 之間對字母 y 積分的，同時先假定了字母 x 是常量。

所以，令所有 Δy 趨近於零，我們就得到

$$\overset{b}{\underset{a}{S}} \Delta x \cdot \int_c^d f(x, y)dy 。$$

再令 Δx 趨近於零，我們求得最後結果：

$$\iint\limits_{PQTR} f(x, y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy 。$$

這樣，矩形上二重積分的求法如下：

法則　第一步　首先設變量 x 爲常量，將函數 $f(x, y)$ 在定出 y 變化範圍的上下限 d, c 之間對變量 y 積分。

第二步　將第一步所得結果，在定出 x 變化範圍的上下限 b, a 之間對 x 積分。

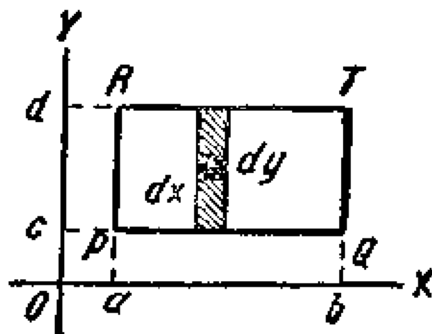


圖 120

圖 120 可幫助讀者記憶，首先是沿垂直各條（卽 x 爲常量）積分，然後再由 a 到 b 對 x 積分。

第二法

❶　這個論斷表面上看起來很冒然，但是甚至從形式上講它也是無可懷疑的，因爲我們一開始就假定了二元積分和的極限存在。

首先按變量 x 求和,然後再按變量 y 求和。

前面關於第一法所講過的種種,都可用到第二法上來,因爲變量 x 及 y 的性質是完全一樣的。只不過在這裏一切都反過來罷了,這是由於這裏 x 及 y 的作用對調了的緣故。

首先把二元積分和中各項的次序變換一下:先按指標 i 求和,再按指標 j 求和。這樣使我們可把二元積分和寫爲:

$$\mathop{S}_{j=0}^{m-1}[\Delta y_j\cdot\mathop{S}_{i=0}^{n-1}f(x_i,y_j)\Delta x_i]。$$

這裏按指標 j 求部分和時,Δy_j 是作爲常量的,所以可把它拿在這個部分和的符號外來。

我們將所得公式寫爲:

$$\mathop{S}_{c}^{d}[\Delta y\mathop{S}_{a}^{b}f(x,y)\Delta x],$$

並假定前面所默認的事依然有效,即變量 x 及 y 不是通過所有可能的數值,而只是各取得 $a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 及 $c, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ 這些數值的。

二元積分和中,諸項的這種排列次序,在幾何上表示了:首先沿着橫條蒐集各項,因爲在求第一個和時,y 假定爲常量(圖 121);然後,把所有橫條上的項都蒐集起來,求第二個外面的和,把所有水平和都加了起來,所以現在必須變化 y 了。

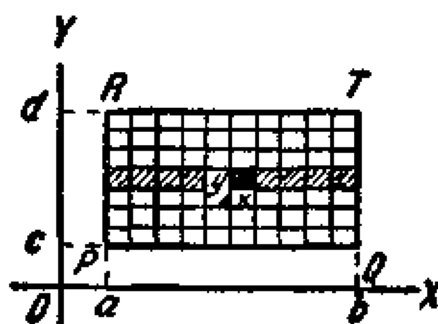


圖 121.

爲完全算出二重積分

$$\iint_{PQTR}f(x,y)dx\,dy,$$

我們應使二元積分和中各矩形的邊長 Δx 及 Δy 同時無限減小。首先令邊長 Δx 無限減小,可得下式作爲計算二元積分和的極限時中間階段的數量:

$$\overset{d}{\underset{c}{S}} \Delta y \int_a^b f(x, y)dx \text{。}$$

再令 Δy 趨近於零，我們求得最後結果：

$$\iint_{PQTR} f(x, y)dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \text{。}$$

法則　第一步　設變量 y 爲常量，將函數 $f(x, y)$ 在定出 x 變化範圍的上下限 b, a 之間對變量 x 積分。

第二步　將第一步所得結果，在定出 y 變化範圍的上下限 d 及 c 之間，對變量 y 積分。

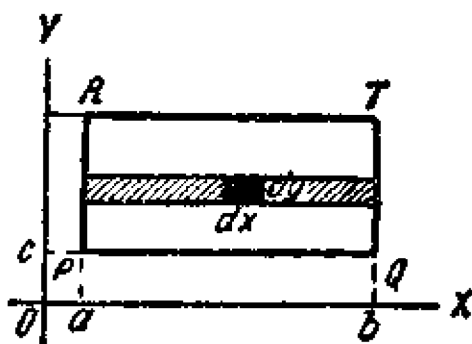


圖　122.

圖 122 可幫助讀者記憶，首先沿水平橫條(y 爲常量)積分，然後再由 c 到 d 對字母 y 積分。

例 1　計算矩形 $PQTR$ 上的積分

$$\iint_{PQTR} xy\,dx\,dy,$$

矩形的四個頂點各是(2, 1), (10, 1), (10, 7), (2, 7)(圖 123)。

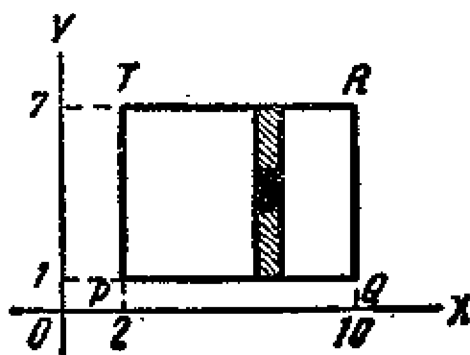


圖　123.

第一法

解　第一步　設字母 x 爲常量，將函數 xy 在定出 y 變化範圍的上下限 7 及 1 之間對變量 y 積分：

$$x\int_1^7 y^{-\frac{1}{2}}dy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^7 = \left(\frac{49}{2} - \frac{1}{2}\right)x = 24x \text{。}$$

第二步　將第一步的結果在定出 x 變化範圍的上下限 10 及 2 之間對變量 x 積分。

$$24\int_2^{10} xdx = 24\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{10} = 24 \cdot 48 = 1152 \text{。}$$

計算應簡寫如下：

$$\iint_{PQTR} xy\,dx\,dy = \int_2^{10}\int_1^7 xy\,dx\,dy = \int_2^{10} dx \int_1^7 xy\,dy = \int_2^{10} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^7 dx = \int_2^{10} 24x\,dx = 1152 \text{。}$$

第二法

改變積分次序，先對 x 積分，再對 y 積分，得：

$$\iint\limits_{PQTR} xy\,dx\,dy = \int_1^7\int_2^{10} xy\,dy\,dx = \int_1^7 dy\int_2^{10} xy\,dx = \int_1^7 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{10} dy = 48\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^7 = 48\cdot 24 = 1152。$$

例 2. 試求正平行六面體的體積❶(圖 124),其底爲例 1 中的矩形,高爲 5。

解 設 $f(x, y)=5$。按幾何意義(§ 120),二重積分 $\iint\limits_{PQRT} 5\,dx\,dy$ 給出了所求的平行六面體的體積。

$$\iint\limits_{PQRT} 5dx\,dy = \int_2^{10}\int_1^7 5dx\,dy = 5\int_2^{10}\int_1^7 dx\,dy = 5\int_2^{10} dx\int_1^7 dy =$$

$$= 5\int_2^{10}[y]_1^7\,dx = 5\int_2^{10} 6dx = 5\cdot 6\cdot 8 = 240。$$

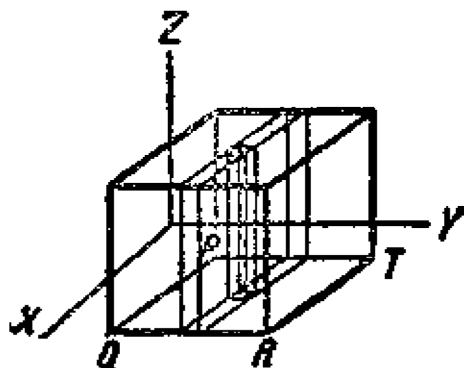


圖 124.

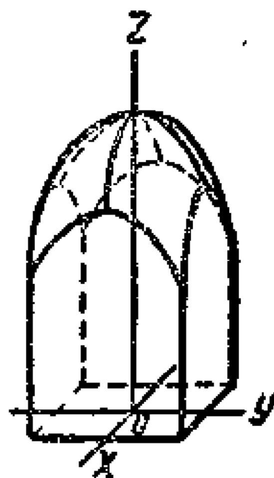


圖 125.

例 3. 一正六面體上面被拋物面 $z=4-x^2-y^2$ 所割斷,底面在 XOY 平面上,是由直線 $x=\pm1,\ y=\pm1$,所圍成的(圖 125)。試求其體積。

解 這裏 $f(x,y)=z=4-x^2-y^2$, 我們有:

$$V=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(4-x^2-y^2)\,dy\,dx=\int_{-1}^{+1}dy\int_{-1}^{+1}(4-x^2-y^2)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left[4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_{-1}^{+1}dy=\int_{-1}^{+1}\left(8-\frac{2}{3}-2y^2\right)dy=13\frac{1}{3}。$$

§122. 二重積分的計算法. 由曲線圍成的區域的一般情形

首先我們假定,由曲線 C 所圍成的區域 D 是這樣的: 每一條平行於 OY 軸的直線與該曲線的交點不多於兩個 (圖 126)。這種情形我們

❶ 平行六面體的體積當然並不要用積分來算,這裏不過是作爲所討論的問題的一個例子。

要仿照着前面的情形來討論❶。

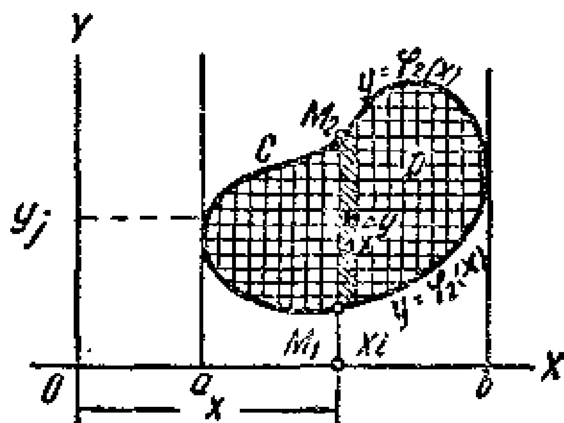


圖 126.

設 P 點的橫坐標當 x, M_1 及 M_2 爲過 P 點平行於 OY 軸的直線與圍線 C 的兩個交點，則 PM_1 及 PM_2 兩線段之長依賴於 x。隨之，PM_1 及 PM_2 兩線段之長，爲自變量 x 的某兩個函數。

引入記號：$PM_1=\varphi_1(x)$ 及 $PM_2=\varphi_2(x)$，並假設圍線 C 是使得函數 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 爲連續的這種圍線。

設 $f(x, y)$ 爲封閉區域 D（就是包括圍線在內的區域）上的所給連續函數。

爲求二元積分和，我們引諸直線平行於 OX 及 OY 軸，將區域 D 分爲許多極小矩形。這時，所形成的矩形共有兩種：一種是完整的矩形，另一種是被圍線 C 所割切的矩形。第一種位於圍線之內，第二種與圍線相交。這第二種矩形我們總是忽略掉的。因爲二元積分和中由它們所引起的那部分量，將隨着所有矩形直徑的無限減小而無限減小。實際上，若用 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_p$ 表示這些被圍線 C 所切割的矩形的面積，並由其中各取一點 $M', M'', \cdots, M^{(p)}$，我們看到：這些不完整的矩形，將把 $f(M')\cdot\omega_1, f(M'')\cdot\omega_2, \cdots, f(M^{(p)})\cdot\omega_p$。諸項帶入二元積分和中。

但函數 $f(x, y)$ 既是連續的，所以是有界的。這表示我們恆有不等式：

$$|f(x,y)|<K,$$

其中 K 是一個正的常數。

因此，積分和中由那些不完整矩形所形成的各項之和，其絕對值將小於

❶ 這種情形的嚴格討論，請參閱較完全一些的數學解析教程。

$$K\cdot\omega_1+K\cdot\omega_2+\cdots+K\cdot\omega_p$$

或 $$K(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p)。$$

但是，$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p$ 是所有這些被圍線 C 所切割的矩形面積之和。而被圍線 C 所切割的那些矩形面積的和 $\omega_1+\omega_2\cdots+\omega_p$，是隨着這些矩形直徑的無限減小而趨近於零的，這個事實，讀該應該看作是很明顯的。這樣，我們就有 $\lim K(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p)=0$，這證明了那些不完整矩形總是可以忽略掉的。

至於完整矩形，則我們把它們全部取來，並從每個完整矩形中取其左下角的點 M，來求二元積分和。因此，假若$(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}, y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1})$爲"一般的矩形"，則它在二元積和中帶進去一項：

$$f(x_i,y_j)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j,$$

所以整個二元積分和(除掉從不完整矩形所產生的那些項)可寫爲

$$\underset{i\ \ j}{SS} f(x_i,y_j)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j,$$

其中指標 i 及 j 應取得，使對應的整個矩形 $(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\ y_j\leqslant y\leqslant\leqslant y_{j+1})$ 一定位於圍線 C 之內，並使它不是被切割的，也不超出圍線 C 之外。

將這個二元積分和縮寫爲：

$$\underset{x\ \ y}{SS} f(x,y)\Delta x\,\Delta y;$$

其中 x 及 y 並不能取到所有可能的數值，而只取得一定的數值 x_i 及 y_j；這些數值是用來織成那些填滿圍線 C 內部的矩形網的，同時尚須受一個限制，即所織成的那些對應矩形應整個位於圍線 C 的內部。寫出這和式之後，我們再重新安排各項。

這就是說，一開始我們把組成垂直條的那些矩形的項蒐集在一起。故在蒐集垂直條的各項時，我們一定要把變量 x 當作常量。因此，這些項的因子 Δx 是一樣的，隨之，可以拿到按垂直條求的部分和的符號外面來。然後，把所有這些垂直條中的項蒐集在一起之後，我們應把所有

這些按垂直條所求的和統統加起來，還時就應當變化變量 x 了。

假若我們照上面所講的這樣做了之後，二元積分和就取得形式：

$$\underset{x}{S}[\Delta x\times \underset{y}{S} f(x,y)\Delta y]。$$

爲計算二重積分 $\iint_D f(x,y)dx\,dy$，我們應令二元積分和中各矩形的邊長 Δx 及 Δy 同時趨近於零。我們先令邊長 Δy 無限減小，像在矩形區域上積分時所講的一樣。我們將得下面的式子，作爲計算二元積分和極限時的中間階段的數量：$\underset{x}{S}\Delta x\times\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x)dy$，這是因爲當 x 爲常量時，在所論垂直條的諸矩形中所取的點 $M(x,y)$，只在線段 M_1M_2 上，並把線段分成了無限減小的許多份。因此，當 x 爲常量時，積分變量 y 只跑過線段 M_1M_2，所以對 y 積分時，我們有：$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，其中的 x 在這時只作爲常量。

最後，令 Δx 趨近於零，我們得最後結果：

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

其中 a 及 b 爲橫坐標 x 的兩個界值；一般說來，這兩個界值只是區域 D 中諸矩形頂點的橫坐標才可能有。所以 a 及 b 這兩個數，是使 $x=a$ 及 $x=b$ 兩垂線，各由左方及右方切於圍線 C，而把圍線夾在其間的。

這樣，要計算由圍線 C 所圍區域 D 上的二重積分時，若圍線 C 不與自身相交，又每一條平行於 OY 軸的直線與該圍線的交點不超過兩個(圖 127)，則我們有下述法則：

法則 第一步 求圍線 C 的上下兩曲線的方程：$y=\varphi_1(x)$ 及 $y=\varphi_2(x)$。

第二步 設 x 爲常量，在上下限 $\varphi_2(x)$ 及 $\varphi_1(x)$ 之間，將函數 $f(x,y)$ 對 y 積分。

第三步 將第二步所得結果，在兩個常數 a 及 b 之間對 x 積分，a 及 b 是這樣

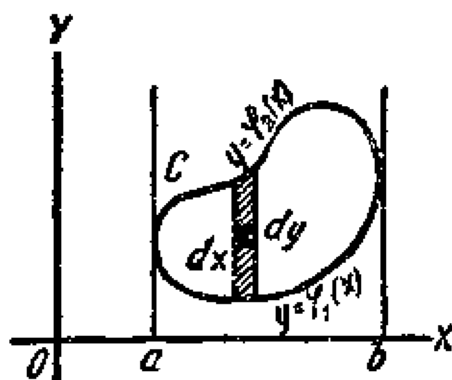


圖 127.

求得的，即它們使直線 $x=a$ 及 $x=b$ 各從左邊及右邊跟包含在它們之間的圍線 C 相切。

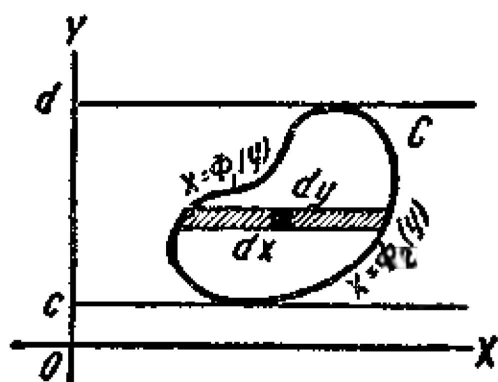


圖 128.

因為變量 x 及 y 的作用是一樣的，故讀者不用任何新的論證，就可看到下列求區域 D 上二重積分的法則是正確的，只要每一條平行於 OX 軸的直線與包圍區域 D 的圍線 C 的交點不多於兩個就行了(圖 128)。

第一步　求圍線 C 的左右兩曲線的方程：$x=\Phi_1(y)$ 及 $x=\Phi_2(y)$（圖128）。

第二步　設 y 為常量，在上下限 $\Phi_2(y)$ 及 $\Phi_1(y)$ 之間，將函數 $f(x,y)$ 對 x 積分。

第三步　將第二步所得結果，在兩常數 c 及 d 之間對 y 積分；c 及 d 是這樣求得的，即它們使直線 $y=c$ 及 $y=d$ 各從下面及上面跟包含在它們之間的圍線 C 相切。

假若圍線 C 與垂直及水平直線的交點不多於兩個，則可立即應用上述兩個法則，並應選擇那個較為方便的法則來做。

假若圍線 C 與平行於坐標軸的直線的交點多於兩個，則我們可將圍線 C 所包含的面積，分為好幾部分，使得對於每一部分都可分別應用前述法則。

例如對於圖 129 所表示的區域 D，只要沿虛線分割區域 D，使前述法則可分別應用於三個區域 D_1, D_2 及 D_3。顯然，在 D 上的二重積分，等於在 D_1，及 D_2 及 D_3 上的三個二重積分之和。

例　試積分函數 $f(x,y)=x+2y$，假若我們只在曲線 $y^2=4+x$ 及 $x=5$ 所圍的區域上來考慮這積分值(圖 130)。

解　所求積分是：

$$I=\int_c^d\int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)}(x+2y)\,dy\,dx,$$

這時，我們先對 x 積分。

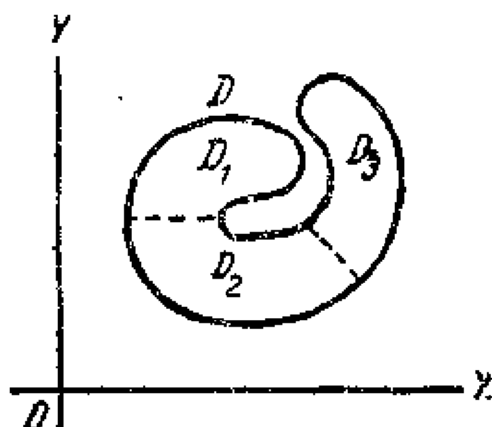


圖 129.

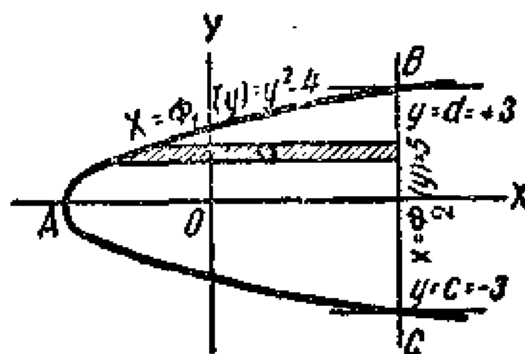


圖 130.

第一步 求包圍所論區域圍線左右兩部分的方程：$x=\Phi_1(y)$ 及 $x=\Phi_2(y)$。左邊的圍線爲拋物線，由其方程求得：$x=y^2-4$。右邊的圍線爲直線 $x=5$。隨之，$x=\Phi_1(y)=y^2-4$ 及 $x=\Phi_2(y)=5$。

第二步 假定 y 爲常量，在上下限 $x=5$ 及 $x=y^2-4$ 之間，將函數 $x+2y$ 對 x 積分：

$$\int_{y^2-4}^{5}(x+2y)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2yx\right]_{y^2-4}^{5}=\frac{9}{2}+18y+4y^2-2y^3-\frac{y^4}{2}$$

第三步 現在應將所得結果在兩常數 c 及 d 之間對 y 積分了；這兩個常數的決定，應使圍線 C 被夾在直線 $y=c$ 及 $y=d$ 之間，並切於它們。顯然，在這種情形下，這種直線是平行於 Ox 軸且通過直線 $x=5$ 與拋物線之交點的。爲決定交點 B 及 C，應解拋物線與直線的聯立方程，求得：$B(5,3)$；$C(5,-3)$。於是所求直線爲 $y=-3$，$y=+3$。因此，所求下上限爲 $c=-3$，$d=+3$。故：

$$I=\int_{-3}^{+3}\left(\frac{9}{2}+18y+4y^2-2y^3-\frac{y^4}{2}\right)dy=50\frac{2}{5}。$$

當讀者已習慣於做這種問題的解答時，可立即求出內外兩積分的上下限，把積分計算寫得簡短些。這樣，就有：

$$I=\int_{-3}^{+3}\int_{y^2-4}^{5}(x+2y)dy\,dx=\int_{-3}^{+3}\left[\frac{x^2}{2}+2yx\right]_{y^2-4}^{5}dy=$$

$$=\int_{-3}^{+3}\left(\frac{9}{2}+18y+4y^2-2y^3-\frac{y^4}{2}\right)dy=50\frac{2}{5}。$$

現在我們變換積分次序，再來解這個例題：

$$I=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}(x+2y)dx\,dy。$$

第一步 求包圍所論區域圍線的上下兩部分曲線方程 $y=\varphi_2(x)$ 及 $y=\varphi_1(x)$（圖 131）。下曲線即拋物線 $y^2=4+x$ 的下支，上曲線即其上支。故得：

$$y=\varphi_1(x)=-\sqrt{4+x}$$

$$y=\varphi_2(x)=+\sqrt{4+x}。$$

第二步 設 x 爲常量，將函數 $x+2y$ 在第一步所求得的上下限之間對 y 積分：

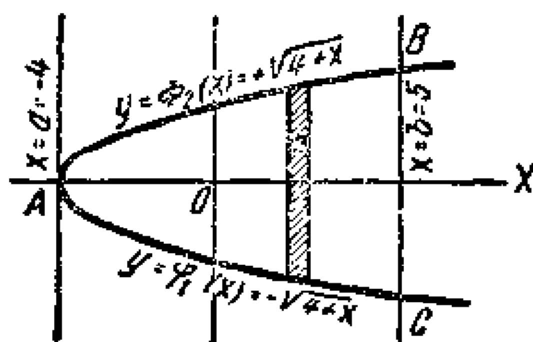


圖 131.

$$\int_{-\sqrt{4+x}}^{+\sqrt{4+x}}(x+2y)dy=2x\sqrt{x+4}。$$

第三步 現在應將所得結果在二常數 a 及 b 之間對 x 積分；這兩個常數的決定，應使圖線 C 介於直線 $x=a$ 及 $x=b$ 之間，且切於它們。顯然，在現在這種情形，這種直線，左邊的是過拋物線頂點且平行於 OY 軸的直線；右邊的是直線 $x=5$。左邊的直線方程是 $x=-4$，因為 A 點的坐標為 $(-4, 0)$。這樣 $a=-4$, $b=5$。因此，就有：

$$I=\int_{-4}^{+5}2x\sqrt{4+x}\,dx=50\frac{2}{5}。$$

我們注意，用第二個方法計算積分時，我們要遇到比較難一些的積分。因此，在選擇積分次序時，應留意到第一次積分後所得函數是不是複雜的。在 § 125 的例子中，我們將指出，在選擇積分次序時，也應當考慮到包圍積分區域的圖線的性質。

§123. 極坐標二重積分

我們知道，在計算二重積分 $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ 時，根本不一定要利用那些四邊都平行於 OX 及 OY 軸的、無限減小的矩形。這裏可有無窮多種可能的做法。我們知道，下面的等式總成立：

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\lim[f(M_0)\sigma_0+f(M_1)\sigma_1+\cdots+f(M_{n-1})\sigma_{n-1}],$$

其中區域 D 所分成的無限減小的面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 可以是任意的形狀。重要的只是點 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 應取在其對應的各小塊面積 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 上。

用極坐標來計算二重積分，有時是很方便的。

在這種情形，面積 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 由兩族曲線所作成：一族是通過極點 O 的直線，一族是以極點 O 為心的同心圓(圖 132)。

在這些條件下，如果把"一般小塊"當作是以 $\rho d\theta$ 與 $d\rho$ 為邊長的矩形，那末，一般小塊的面積顯然近似等於 $\rho d\rho d\theta$。

故二重積分可寫為：

$$\iint\limits_D F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta。$$

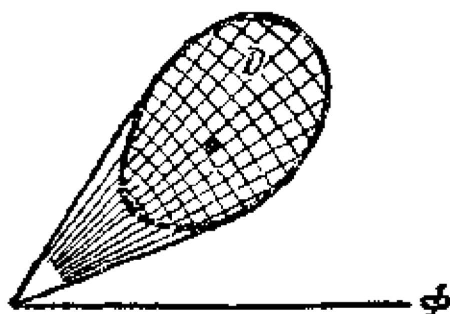


圖 132.

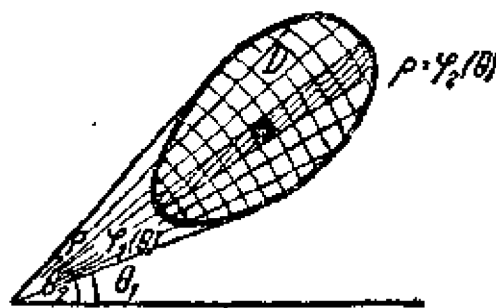


圖 133.

看一看圖 133 及圖 134，讀者就可以知道，實際上應怎樣來計算極坐標的二重積分：

$$\text{I.}\quad \iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho \qquad (\text{圖 } 133)$$

$$\text{II.}\quad \iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho\int_{\Phi_1(\rho)}^{\Phi_2(\rho)}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,d\theta \qquad (\text{圖 } 134)$$

例　計算函數 $f(\rho,\theta)=\rho^2$ 在被圓 $\rho=2a\cos\theta$ 所包圍的區域上的積分(圖 135)。

解　我們應計算積分

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\rho^2\cdot\rho\,d\theta\,d\rho,$$

其中 $\rho=\varphi_1(\theta)=0$，(這由圖 135 可立即看出來)，而 $\rho=\varphi_2(\theta)=2a\cos\theta$ (由圓綫方程得到)。至於 θ_1 及 θ_2 的數值，那末不難看到：$\theta_1=-\frac{\pi}{2}$，及 $\theta_2=+\frac{\pi}{2}$，因爲當 θ 角由 $-\frac{\pi}{2}$ 變到 $+\frac{\pi}{2}$ 時，就會掃出那分成許多扇形的整個積分區域。因此有：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3d\theta\,d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\pi a^4。$$

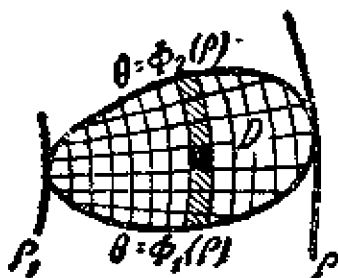


圖 134.

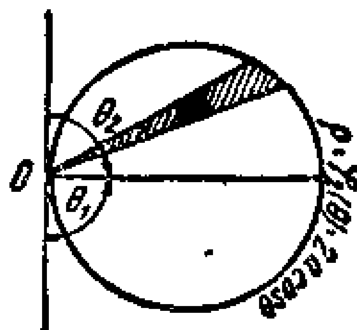


圖 135.

習 題

證實下列積分的結果❶:

1. $\int_0^a\int_0^b xy(x-y)dy\,dx=\frac{a^2b^2}{6}(b-a)$。

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^a \rho^4\,d\theta\,d\rho=\left(\pi-\frac{16}{15}\right)\frac{a^5}{10}$。

3. $\int_0^a\int_{y-a}^{2y} xy\,dy\,dx=\frac{11a^4}{24}$。

4. $\int_{\frac{b}{2}}^b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{3}{16}\pi b^2$。

5. $\int_0^1\int_0^{v^2} e^{\frac{w}{v}}dv\,dw=\frac{1}{2}$。

6. $\int_0^a\int_{\frac{x^2}{a}}^x \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}=\frac{a}{2}\ln 2$。

7. $\int_0^\pi\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\rho=\frac{2a^3}{3}$。

8. $\int_0^b\int_t^{10t}\sqrt{st-t^2}\,dt\,ds=6b^3$。

9. $\int_0^{2a}\int_v^{\frac{v^2}{4}}(w+2v)dv\,dw=11.2a^3$。

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\theta}\rho^2\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho=2\frac{2}{5}$。

11. 將函數 $f(\rho,\theta)=\sin\theta$,在圓周 $\rho=a\cos\theta$ 上半部所圍區域上積分。 答 $\frac{a^2}{6}$。

12. 將函數 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$, 在 OY 軸及拋物線 $y^2=a^2-ax$ 所圍區域上積分。

答 $4a$。

13. 將函數 $f(x,y)=x^2+y^2$,在 OX 軸及二直線 $y=x$ 及 $x=2a$ 所圍成的面積上積分。

答 $\frac{16}{3}a^4$。

二重積分的應用

§124. 柱體的體積

在 §120 中,已經指出:假若函數 $z=f(x,y)$是一個曲面方程,曲面蓋在一個柱體的頂上,該柱體的母線平行於 Oz 軸,又基線 C 位於 XOY 平面上,則應函數在圍線 C 所圍成的區域 D 上的二重積分:

$$Y=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$$

❶ 第一個積分的積分號及其積分變量的微分,都是寫在第二個積分的積分號及其積分變量的微分之後的。

表示了這個柱體的體積。

在§121中我們已經討論過柱體體積的計算例題了(參閱例3)。

習　題

1．求柱面 $y=x^2$，$x=y^2$ 及曲面 $z=12+y-x^2$ 所圍成的體積。　答　$4\frac{9}{140}$。

2．求平面 XOY，柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $x+y+z=3$ 所圍成的體積。

答　3π。

3．求第一象限中，由柱面 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 及拋物面 $xy=z$ 所圍成的體積。

答　π。

4　試計算一立體的體積，包圍它的面各是：平面 XOY，柱面 $x^2+y^2-2ax=0$ 及下述直圓錐體：該錐體的頂點在原點，軸就是 OZ 軸，錐頂所張的角爲 $90°$。　答　$\frac{32}{9}a^3$。

5．求一立體的體積，包圍它的曲面是：一個以 a 爲半徑的球面及一個底半徑爲 $\frac{a}{2}$ 的圓柱面，且圓柱面的一條母線通過球心。　答　$\frac{2}{9}a^3(3\pi-4)$。

6．求一立體的體積，包圍它的曲面是：底——XOY 平面上由雙紐線 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 所圍成的面積，上頂——球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，側面——過雙紐線的柱面。

答　$\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$。

7．求由平面 XOY 拋物面 $az=x^2+y^2$ 及柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所圍成的體積。

答　$\frac{3}{2}\pi a^3$。

§125．平面曲線所圍成的面積

前面曾指出：在由圍線 C 所圍成的區域 D 上，函數 $f(x,y)$ 的二重積分，表示了一個柱體的體積，其母線平行於 OZ 軸，其頂則是被曲面 $y=f(x,y)$ 所蓋住的。我們設 $f(x,y)=1$，則積分

$$\iint\limits_D dx\,dy \text{ 或 } \iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta$$

顯然表示了一個圓柱的體積，它豎立在圍線 C 所包圍的區域 D 上，高爲一。這個體積，在數值上是等於由圍線 C 所包圍的區域 D 的面積的。由此可知：平面圖形的面積，可用二重積分算出來：

$$\iint\limits_D dx\,dy \text{（用直角坐標時），}$$

$$\iint\limits_{D} \rho\, d\rho\, d\theta \text{（用極坐標時）。}$$

例　求拋物線 $y^2=4x+4$ 及直線 $y=2-x$ 所圍成的面積(圖 136)。

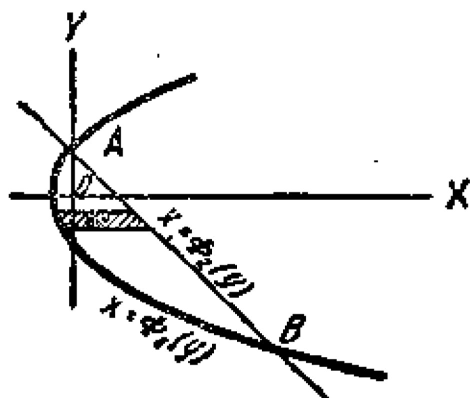


圖　136.

解　解所給曲線方程組，求得拋物線與直線的交點 $A(0,2)$ 及 $B(8,-6)$。首先對 x 積分，則左界線的方程 $x=\Phi_1(y)$ 可由拋物線方程求得：$x=\frac{y^2-4}{4}$；而右界線的方程 $x=\Phi_2(y)=2-y$ 就是直線方程。常數上下限 d 及 c，顯然各等於 $+2$ 及 -6。因此有：

$$S=\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx\,dy=\int_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\frac{64}{3}$$

註　假若先對 y 積分，則整個計算就麻煩得多。在 OY 的左邊，應在下上限 $y=-\sqrt{4x+4}$ 及 $y=+\sqrt{4x+4}$ 之間積分；而其右邊，應在 $y=-\sqrt{4x+4}$ 及 $y=2-x$ 之間積分。隨之，所求面積 S 是兩個重積分：

$$S=\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{4x+4}}^{+\sqrt{4x+4}} dx\,dy+\int_{0}^{8}\int_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} dx\,dy\text{。}$$

習　題

1．用二重積分求拋物線 $3y^2=25x$ 及 $5x^2=9y$ 之間的面積。　　答　5。

2．試求第一象限中介於拋物線 $y^2=ax$ 及圓 $y^2=2ax-x^2$ 之間的面積。

答　$\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{2}{3}a^2$。

3．用二重積分求介於圓 $\rho=a\cos\theta$，$\rho=b\cos\theta\ (b>a)$ 之間的面積，首先對 ρ 積分。

答　$\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$。

4．用二重積分求由下列各組曲線所圍成的面積：

(a) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$，$x+y=a$。　　答　$\frac{a^2}{3}$。

(b) $xy=4$，$x+y-5=0$。　　答　$\frac{1}{2}(15-8\ln 4)$。

(c) $y^2=4ax+4a^2$，$y^2=-4bx+4b^2$。　　答　$\frac{8}{3}(a+b)\sqrt{ab}$

(d) $y=\sin x$，$y=\cos x$，$x=0$。　　答　$\sqrt{2}-1$。

(e) $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$，$2y=x$，$x=0$。　　答　$a^2(\pi-1)$。

(f) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，$x+y=a$。　　答　$\frac{a^2}{32}(16-3\pi)$。

§126. 平面圖形的重心

假若用 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 表示平面圖形的重心的坐標，則如 §56 所指出的：

$$\bar{x}=\frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y}=\frac{\int y dm}{\int dm},$$

其中 x 及 y 爲面積元素的質量 dm 所集中點的坐標。隨之，我們可以設 $dm=\omega\, dxdy$ 或 $dm=\omega\rho\, d\rho\, d\theta$，其中 ω 爲所論面積的面密度。因此，我們現在得到二重積分來作爲 $\omega x\, dx\, dy$，$\omega y\, dx\, dy$，及 $\omega\, dx\, dy$ 各項的和的極限。故有：

$$\bar{x}=\frac{\iint \omega x\, dx\, dy}{\iint \omega\, dx\, dy}, \quad \bar{y}=\frac{\iint \omega y\, dx\, dy}{\iint \omega\, dx\, dy},$$

這時，我們應在需要求重心的那塊面積上來計算積分。

極坐標中，上述公式取得下面的形式：

$$\bar{x}=\frac{\iint \omega\rho^2 \cos\theta d\rho\, d\theta}{\iint \omega\rho\, d\rho\, d\theta}, \quad \bar{y}=\frac{\iint \omega\rho^2 \sin\theta d\rho\, d\theta}{\iint \omega\rho\, d\rho\, d\theta}$$

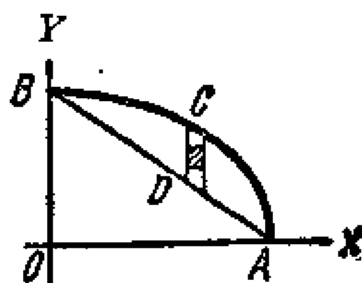


圖 137.

假若密度 ω 爲常量，則可把它拿到積分號外來，公式就更簡單了。以後，我們只討論這種最簡單的情形，故在下面的例子中，我們認爲 ω 是常量，不再說明了。

例 1. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 被直線 $bx+ay=ab$ 所割出部分的重心（圖 137）。

解 內積分的上下限 $\varphi_2(x)$ 及 $\varphi_1(x)$，各從直線及橢圓方程求得：

$$\varphi_1(x)=\frac{ab-bx}{a}, \quad \varphi_2(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}。$$

外積分的上下限爲 $x=0$ 及 $x=a$。

現在計算重心公式中的各積分：

$$\int_0^a\int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\, dx\, dy=\int_0^a\left(\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}-ba+\frac{bx^2}{a}\right)dx=\frac{1}{6}ba^2,$$

$$\int_0^a\int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dx\,dy=\frac{1}{a^2}\int_0^a(-b^2x^2+ab^2x)\,dx=\frac{1}{6}b^2a,$$

$$\int_0^a\int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx\,dy=\frac{1}{4}ab(\pi-2)。$$

故：
$$\bar{x}=\frac{2a}{3(\pi-2)},\quad \bar{y}=\frac{2b}{3(\pi-2)}。$$

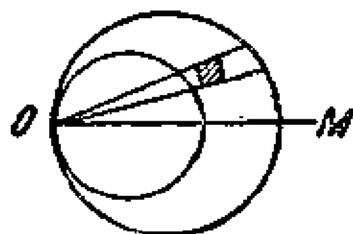


圖　138.

例 2．求圓 $\rho=a\cos\theta$，$\rho=b\cos\theta$ 所圍面積的重心（圖 138）。設 $b>a$。

解　由圖形的對稱性，立即可知：$\bar{y}=0$。今計算決定橫坐標 $\bar{x}$ 的公式中的積分：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2\cos\theta\,d\theta\,d\rho=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\pi(b^3-a^3),$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho\,d\theta\,d\rho=\frac{1}{4}\pi(b^2+a^2)。$$

隨之：
$$\bar{x}=\frac{b^2+ab+a^2}{2(b+a)}。$$

習　題

（爲多練習起見，讀者可用二重積分法作 § 156 中的習題 1,3,6,7,8,10,11,13）、

求下列各曲線所圍成圖形的重心。

(a) 曲線 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 的一環。　　答　$\bar{x}=\frac{\pi\sqrt{2}a}{8}$，$\bar{y}=0$。

(b) 曲線 $\rho=a\sin 2\theta$ 的一環。　　答　$\bar{x}=\frac{128a}{105\pi}=\bar{y}$。

(c) 心狀線 $\rho=a(1+\cos\theta)$。　　答　$\bar{x}=\frac{5a}{6}$，$\bar{y}=0$。

§127．平面圖形面積的慣性矩

所謂質點對於一軸的慣性矩，乃該點的質量乘上它到該軸的距離的平方。所謂質點系統對於一軸的慣性矩，乃各個質點對於該軸的慣性矩的和。利用這些定義，我們可以用下述方法將慣性矩概念推廣到平面圖形面積上。

將所給圖形（區域 D）的面積分爲許多小面積，如圖 139 所示。

設 PG 是這些小面積中的一個。用 (x, y) 表示 P 點的坐標。面積

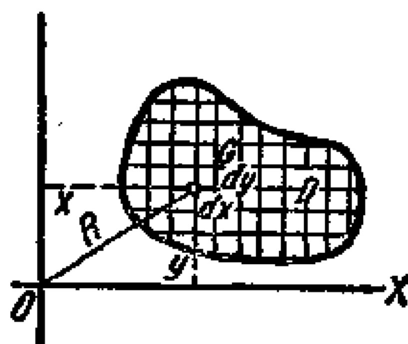


圖 139.

元素等於 $dx\,dy$。設圖形的密度到處為 1，則該元素的質量等於 $dx\,dy$。欲求對於 OX 軸的慣性矩，可取 $y^2\,dx\,dy$ 作為小面積 PQ 的慣性矩的近似值。

故按一般方法我們取：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} SS\, y^2\,dx\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy\text{。}$$

作為整個平面圖形對於 OX 軸的慣性矩。

用 I_x 表示面積對於 OX 軸的慣性矩，得：

$$I_x=\iint_D y^2\,dx\,dy\text{。}$$

同樣求得：

$$I_y=\iint_D x^2\,dx\,dy\text{。}$$

假若計算慣性矩時的參考軸是垂直於坐標平面的，則用 R 表示 P 點到該軸垂足 O 點的距離（圖 139），我們同樣可得整個圖形面積的慣性矩 I：

$$I=\iint_D R^2\,dx\,dy,$$

其中 R^2 已是變量 x 及 y 的函數了。這個慣性矩，稱為對於 O 點的極慣性矩，亦可簡稱為對於 O 點的慣性矩。我們用 I_0 表示。因為顯然 $R^2=$ $=x^2+y^2$，故有：

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy\text{。}$$

這個公式給出了：

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy+\iint_D x^2\,dx\,dy=I_x+I_y\text{。}$$

因此得定理：

平面圖形的面積對於坐標原點的慣性矩，等於該面積對於該平面

上通過該原點的兩根互相垂軸的慣性矩之和。

鑑於極坐標中面積元素的表達式是 $\rho\,d\theta\,d\rho$，又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$x^2+y^2=\rho^2$，我們得到極坐標中慣性矩的公式：

$$I_x=\iint_D \rho^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho,\quad I_y=\iint_D \rho^3\cos^2\theta\,d\theta\,d\rho。$$

$$I=\iint_D R^2\rho\,d\theta\,d\rho,\quad I_0=\iint_D \rho^3\,d\theta\,d\rho。$$

例 1. 求由拋物線 $y^2=4ax$ 直線 $y=2a$ 及 OY 軸所圍成面積的 I_0（圖 140）。

解 先對 x 積分。應用對於坐標原點的慣性矩的公式得：

$$I_0=\int_0^{2a}\int_0^{\frac{y^2}{4a}}(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_0^{2a}\left(\frac{1}{192}\frac{y^6}{a^3}+\frac{1}{4}\frac{y^4}{a}\right)dy=\frac{178}{105}a^4。$$

例 2. 求曲線 $P=a\sin 2\theta$ 的一環的 I_0（圖 141）。

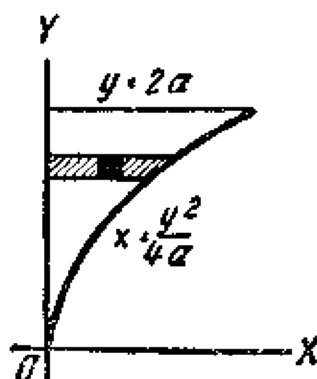


圖　140.

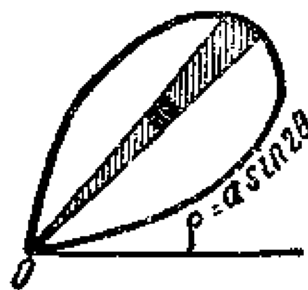


圖　141.

解 應用相應的公式，得：

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sin 2\theta}\rho^3\,d\theta\,d\rho=\frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 2\theta\,d\theta=\frac{3}{64}\pi a^4。$$

習　題

1. 求直線 $x=a$、$y=0$、$y=\frac{b}{a}x$ 所圍成的面積的 I_0。　答 $ab\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}\right)$。

2. 求由直線 $x=a$、$y=b$ 及二坐標軸所圍成矩形的面積的 I_0。　答 $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$。

3. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 面積的 I_y。　答 $\frac{\pi a^3 b}{4}$。

4．求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 面積的 I_0。　　答　$\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$。

5．求一面積的 I_0，該面積係由一直線與拋物線所圍成，二者都通過原點及 (a,b) 點，拋物線的對稱軸即 OX 軸。　　答　$\frac{ab}{4}\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right)$。

6．求圓 $\rho=2a\cos\theta$ 面積的 I_0。　　答　$\frac{3}{2}\pi a^4$。

7．求雙紐線 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 面積的 I_0。　　答　$\frac{1}{8}\pi a^4$。

8．求心狀線 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 面積的 I_0。　　答　$\frac{35}{16}\pi a^4$。

9．求內擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所圍成面積的 I_x。　　答　$\frac{12}{512}\pi a^4$。

10．求由拋物線 $y^2=ax$ 及直線 $x=a$ 所圍成面積對直線 $y=-a$ 的慣性矩。　　答　$\frac{8}{5}a^4$。

§128．曲面面積的一般計算法

§55 中所講的求曲面面積的方法，只能應用到旋轉面上。現在我們講一般的方法。設圖 142 的曲面 KL 的方程是 $z=f(x,y)$。今欲求該曲面上一塊 S' 的面積。

我們用 S 表示 S' 在 XOY 平面上的正射影。引平行於 YOZ 及 XOZ 的諸平面，使其相距各爲 Δx 及 Δy。這些平面割出一些稜柱（例如 MQ），其上頂爲曲面的一部分（如 MN），該部分曲面在 XOY 平面上的射影爲矩形，而矩形的面積爲 $\Delta x\,\Delta y$（如 PQ），同時這些矩形成了稜柱的底。

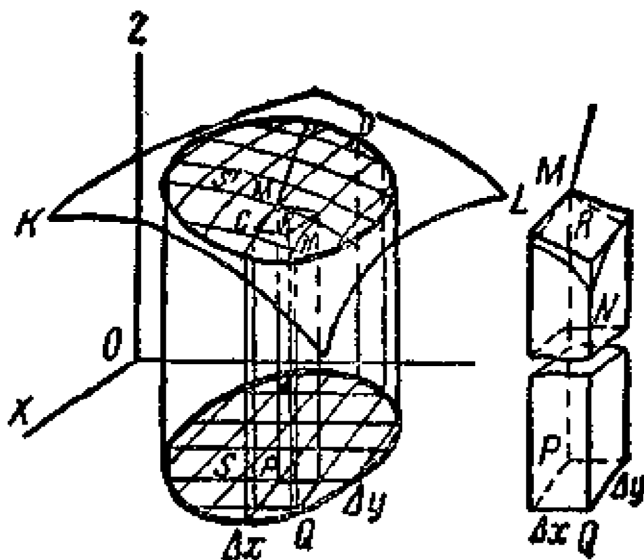


圖 142.

現在來看曲面 KL 在 M 點的切平面，M 點的坐標是 x, y, z。

顯然，切平面被稜柱 MQ 所割的一部分（MR）在 XOY 上的射影，也是矩形 PQ。

用 γ 表示曲面在 M 點的法線與 OZ 軸的交角，這個角等於 M 點處的切平面與 XOY 平面的交角，故

面積 PQ=面積 $MR\cdot\cos\gamma$，

[一面積在另一平面上的射影，等於射影面積乘上兩平面之間夾角的餘弦

或 $$\Delta y\,\Delta x=\text{面積 } MR\cdot\cos\gamma。$$

但 $$\cos\gamma=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

這是切面與 XOY 平面夾角餘弦的公式，我們要注意：分母的根號是取正的，也就是在所論情形下，OZ 軸與曲線平面間的兩個交角中，取銳角]。

隨之

$$\text{面積}\quad MR=\frac{1}{\cos\gamma}\Delta x\Delta y=\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x\Delta y。$$

我們取它作為曲面的面積"元素"，則曲面 S 部分的面積是由下面公式所給出的數：

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}SS\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x\Delta y,$$

這裏，和是在整個區域 S 上求的。用 A 表示曲面 $z=f(x,y)$ 的 S' 部分的面積，故有：

$$A=\iint_S\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx\,dy,$$

這時，積分的上下限，依賴於 XOY 平面上，要計算面積的那部分曲面的射影。隨之，積分的上下限，由包圍平面 XOY 中區域 S 的一根或幾根曲線所給出，一如前幾節中的情形一樣。

上面的論證，只在一個條件之下才正確，即在曲面 $z=f(x,y)$ 所論那部分 S' 的每一點處，存在一定的切平面，而且這些切平面連續地由一處移到另一處時，不會到達與 XOY 平面垂直的位置。

這個條件，從解析上說，就是函數 $z=f(x,y)$ 的連續偏導數 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在。當這個條件不滿足時，被積分函數就不是變量 x 及 y 的連續

函數了。

要是把所討論的曲面射影到 XOZ 平面上更方便些，那末我們有公式。

$$A=\iint_S\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx\,dz,$$

這時上下限應從包圍區域 S 的那根曲線的方程求出，這裏，S 是曲面 S' 部分在平面 XOZ 上的射影。

同樣可得：
$$A=\iint_S\left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dy\,dz,$$

而上下限則從所論面積在 YOZ 上的射影求得。

常常在一些問題中，要計算某曲面被另一曲面所割出的一部分的面積。在這種情形，公式中的偏導數，應從我們要求一部分面積的那個曲面的方程中計算出來。

因爲積分區域的界線，是將曲面的 S' 部分射影在一個坐標平面上後求得的，所以應記住：

爲求 S' 部分在 XOY 平面上的射影，應該從這些曲面（其交線給出了包圍該部分面積的曲線）的方程中消去 Z。

同樣，爲求 XOZ 平面上的射影，應消去 y；又爲求 YOZ 平面上的射影，應消去 x。

例 1. 試求球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的面積。

解 取所求面積的八分之一：ABC（圖 143）。得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

及

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}。$$

所求面積在平面 XOY 上的射影爲 AOB，這是由 $x=0$ (OB)，$y=0(AO)$，$x^2+y^2=r$ (BGA) 所圍成的區域。

首先對 y 積分，我們把所有各條（例如 $EDFG$）的元素都加起來。各條射影在 XOY 平面上，也成條形（$QPFG$），

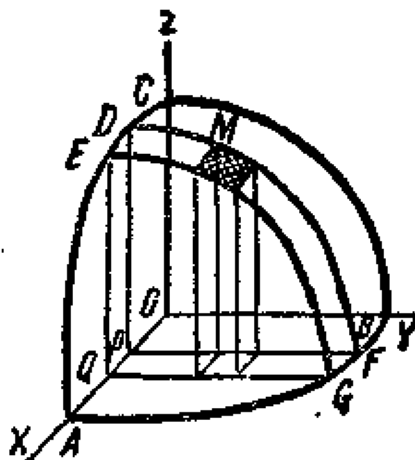


圖 143.

就是說，y 的下上限是零及 $PF\ (=\sqrt{r^2-x^2})$。然後對 x 積分，把組成曲面 ABC 的所有條子都加起來，就是說，x 的下上限是 O 及 $OA\ (=r)$。代入對應的公式中，求得

$$A=8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=4\pi r^2。$$

例 2. 半徑為 r 的球的心，在一正圓柱面上，該圓柱的底半徑為 $\frac{r}{2}$，試求柱面被球所割部分的面積。

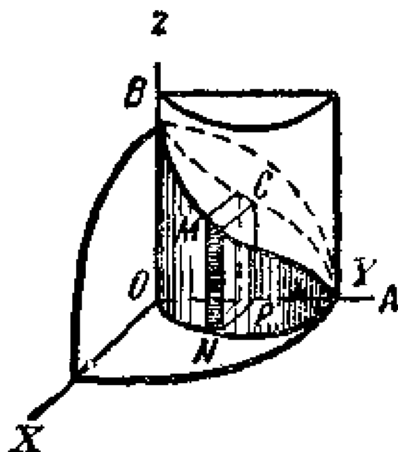


圖 144.

解 取坐標原點為球心，柱面的母線為 z 軸，又取圓柱的正截面的直徑為 y 軸，我們求得球面方程為 $x^2+y^2+z^2=r^2$，柱面方程為 $x^2+y^2=ry$。顯然，$ONAMB$ (圖 144)為所求柱面面積的四分之一。因為這個曲面與 XOY 平面相交為半圓的弧 ONA，故在該平面上並無區域 S，來決定該平面上的積分上下限。因此我們把曲線射影到平面 YOZ 上，積分區域 S 就是 $OACB$。在 YOZ 平面上，它是由曲線 $z=0\ (OA)$，$y=0\ (OB)$，$z^2+ry=r^2(ACB)$所圍成的，且最末一個方程是由兩曲面方程中消去 x 後得到的。首先對 z 積分，這表示把垂直條(如 MN)中的所有元素加起來，z 的下上限各為 0 及$\sqrt{r^2-ry}$。然後對 y 積分，亦即把所有這些條子都加起來，下上限為 0 及 r。

因為所求曲面在柱面上，故本節對應公式中的偏導數，應從柱面方程求得。

我們有：
$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{r-2y}{2x},\ \frac{\partial x}{\partial z}=0。$$

因此
$$\frac{A}{4}=\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-ry}}\left[1+\left(\frac{r-2y}{2x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dz\,dy。$$

由柱面方程將 x 值代以 y 的函數，求得

$$A=2r\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-ry}}\frac{dy\,dz}{\sqrt{ry-y^2}}=2r\int_0^r\frac{\sqrt{r^2-ry}}{\sqrt{ry-y^2}}dy=2r\int_0^r\sqrt{\frac{r}{y}}\,dy=4r^2。$$

習 題

1. 求例 2 中球面被柱面所割部分的面積。

答 $4r\int_0^r\int_0^{\sqrt{ry-y^2}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=2(\pi-2)r^2$。

2. 兩相同正圓柱的軸互相直交，圓柱的底半徑為 r。試求一柱面被另一柱面所割出部分的面積。

提示 柱面方程為：

$$x^2+z^2=r^2 \text{ 及 } x^2+y^2=r^2。$$

答　$8r\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dydx}{\sqrt{r^2-x^2}}=8r^2$。

3．試求介於二平面 $x=-8$ 及 $x=6$ 之間那部分球面 $x^2+y^2+z^2=100$ 的面積。

答　280π。

4．求介於平面 $z=mx$ 及 XOY 之間那部分柱面 $x^2+y^2=r^2$ 的面積。

答　$4r^2m$。

5．求第一象限中曲面 $z^2+(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=r^2$ 的面積。　答　$\frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$。

6．求介於三坐標平面之間的那部分平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的面積。

答　$\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$。

7．求拋物面 $y^2+z^2=4ax$ 被柱面 $y^2=ax$ 及平面 $x=3a$ 所割出部分的面積。

答　$\frac{112}{9}\pi a^2$。

8．求柱面 $y^2=ax$ 被拋物面 $y^2+z^2=4ax$ 及平面 $x=3a$ 所割出部分的面積。

答　$(13\sqrt{13}-1)\frac{a^2}{\sqrt{3}}$。

9．求柱面 $y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 被一曲面所割出部分的面積，該曲面射影在 XOY 平面上成爲曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。　答　$\frac{12}{5}a^2$。

10．求球面 $x^2+y^2+z^2=2ay$ 被錐面 $x^2+z^2=y^2$ 所割出的那部分面積。

答　$2\pi a^2$。

§129．利用三重積分求體積的方法

一些被已知方程的曲面所包圍的立體體積，有時可用三次積分法計算。這個方法只是本章前幾節所講方法的推廣。

設想，所討論的立體，被平行於坐標平面的諸平面分割成邊長各爲 Δx, Δy, Δz 的許多小正平行六面體。這些平行六面體之一的體積是 $\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$，我們取它爲體積元素。

現在我們要把區域 R(爲已知曲面所包圍)內的所有這種元素都加起來；首先把平行於一坐標軸的方柱中的元素都加起來；然後把平行於包含該軸的坐標平面的薄片中的方柱都加起來；最後把所有這些薄片加起來，把這加法逼及在整個所論區域上。於是，當 Δz, Δy 及 Δx 各趨

近於極限零時,立體的體積 V 將是這三元和的極限,亦卽,

$$V=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \underset{R}{SSS} \Delta x\,\Delta y\,\Delta z, \tag{1}$$

這裏的和是在所給曲面所包圍的整個區域 R 上求的。尋常我們不寫(1)而寫:

$$V=\iiint_R dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

這時,積分的上下限,依賴於外圍曲面的方程。

因此,把 §125 中所講種種一般化之後,我們可以把體積作為常量函數 $f(x, y, z)=1$ 在整個所給區域上積分的結果。但有一些問題中,常常需要將 x, y, z 的連續函數在整個區域上積分,我們用記號

$$\iiint_R f(x, y, z)dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

來記這個積分,這就是(類似於以前我們研究過的二元和的)某一個三元和的極限。這個三重積分的計算方法,完全類似於 §122 中二重積分的計算法。

例 1. 求橢球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

的體積。

解 設橢球的八分之一為 $OABC$ (圖 145),包圍該球的曲面方程為

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ (ABC),$$

(2) $$z=0 \ (OAB),$$

(3) $$y=0 \ (OAC),$$

(4) $$x=0 \ (OBC),$$

MN 為元素,亦卽為邊長各為 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的一個正六面體,這些六面體是用平行於諸坐標面的平面分割所論區域而成的。

先對 z 積分,我們把方柱(如 RT)中的這些元素加起來,這時積分下上限為零[根據(2)]及

$$TR=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

[由(1)解而得]。

然後對 y 積分,我們把薄片 $DEPQFG$ 中的方柱都加起來;這時積分的下上限為零[由

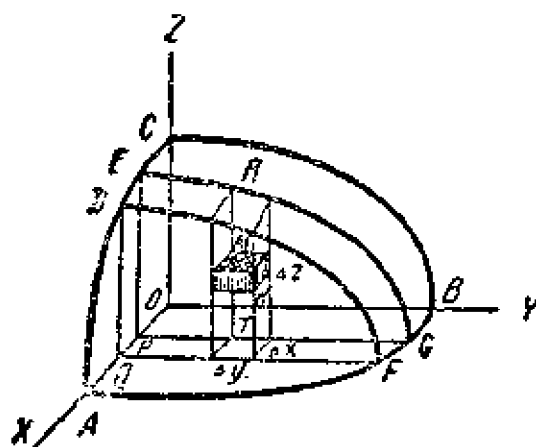


圖 145.

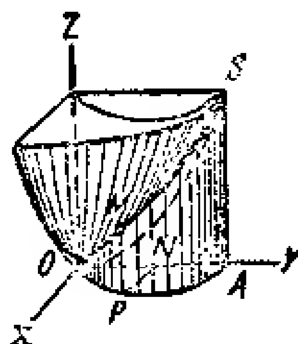


圖 146.

(3)] 及 $PG=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (由曲線 AGB 的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 解 y 而得)。

最後對 x 積分,我們把整個區域 $OABC$ 內的薄片都加起來,這時 x 的下上限爲零[由(4)]及 $OA=a$。

因此
$$\frac{V}{8}=\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dx\,dy\,dz=$$
$$=c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx\,dy,$$
$$V=\frac{8\pi cb}{4a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{4\pi abc}{3}。$$

例 2. 求一立體的體積,它是由拋物旋轉面 $x^2+y^2=az$,柱面 $x^2+y^2=2ay$ 及平面 $z=0$ 所圍成的(圖 146)。

解　z 的下上限爲零及 $PM\left(=\frac{x^2+y^2}{a}\right.$ 係由拋物面方程解 z 而得$\Big)$。

x 的下上限爲零及 $NP(=\sqrt{2ay-y^2}$,係由柱面方程解 x 而得)。

y 的下上限爲零及 $OA(=2a)$。

這些都是關於立體 $OPAB$ 的上下限,但這個立體是所求立體的一半。因之
$$V=2\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} dy\,dx\,dz=\frac{3}{2}\pi a^3。$$

習　題

1. 試求柱體 $x^2+y^2=r^2$ 被平面 $z=0$ 及 $z=mx$ 所割下的一個楔的體積。

答　$2\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^{mx} dx\,dy\,dz=\frac{2}{3}r^3m$。

2. 求正橢圓柱體的體積，其軸為 OX 軸，高等於 $2a$，底面圓線的方程為 $c^2y^2+b^2z^2=$ $=b^2c^2$。 答 $2\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dxdydz=2\pi\,abc$。

3. 求由曲面
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=1。$$
所圍成的整個體積。 答 $\frac{abc}{90}$。

4. 求由曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所圍成的整個體積。 答 $\frac{4\pi a^3}{35}$。

5. 求球(半徑為 a)被圓柱所割出部分的體積，該圓柱的底半徑為 b，又其軸通過球心。
答 $\frac{4}{3}\pi[a^3-(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}]$。

6. 半徑為 r 的球的心，位於正圓柱面上，圓柱的底為 $\frac{r}{2}$，試求柱體被球所割出部分的體積。 答 $\frac{2}{3}\pi r^3$。

7. 求由雙曲拋物面 $cz=xy$，平面 XOY 及平面 $x=a_1$，$x=a_2$，$y=b_1$，$y=b_2$ 所圍成的體積。 答 $\frac{(a_2^2-a_1^2)(b_2^2-b_1^2)}{4c}$。

8. 求兩柱面 $x^2+y^2=r^2$ 及 $x^2+z^2=r^2$ 所圍成的體積。 答 $\frac{16}{3}r^3$。

9. 求由拋物面 $y^2+z^2=4ax$ 及柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所圍成的體積。 答 $2\pi a^3+\frac{16}{3}a^3$。

10. 求拋物面 $x^2+y^2-z=1$ 及平面 XOY 所圍成的體積。 答 $\frac{\pi}{2}$。

11. 求拋物面 $y^2+z^2=4ax$，柱面 $y^2=ax$ 及平面 $x=3a$ 所圍成的體積。
答 $(6\pi+9\sqrt{3})a^3$。

12. 求平面 $z=0$，柱面 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 及雙曲拋物面 $xy=cz$ 所圍成的體積。
答 $\frac{\pi abr^2}{c}$。

13. 求平面 $z=0$，曲面 $x^2+y^2=4az$ 及 $x^2+y^2=2cx$ 所圍成的體積。 答 $\frac{3\pi c^4}{8a}$。

14. 求第一象限中曲面 $xy=az$，$x+y+z=a$ 所圍成的體積。 答 $\left(\frac{17}{12}-\ln 4\right)a^3$。

15. 求平面 $z=0$，柱面 $y^2=2cx-x^2$ 及拋物面 $ax^2+by^2=2z$ 之間的體積。
答 $\frac{\pi c^4}{8}(5a+b)$。

第十章 線積分

§130. 線積分的記號 線積分記爲

$$(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy, \qquad (1)$$

其中 P 及 Q 爲定義在弧 L 上的連續函數，積分法是沿着這個弧，從起點 M_0 到終點 M 來完成的。這兩個端點，稱爲線積分的限點（圖 147）。

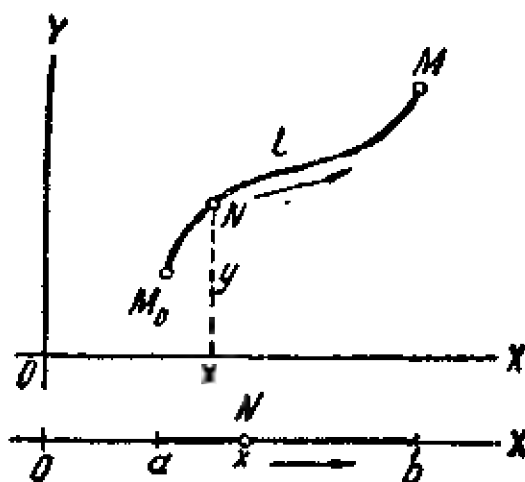


圖 147.

在特別情形下，當積分路徑 L 就是 OX 軸上的線段 $[a, b]$ 時，則線積分（1）變成了定義在直線線段 $[a, b]$ 上的連續函數 P 在上下限 b 及 a 之間從 a 到 b 的普通定積分：

$$\int_a^b Pdx \qquad (2)$$

因此，

線積分是普通定積分的推廣，後者從這個觀點看來，乃是橫坐標軸的直線線段上的線積分。

§131. 線積分的來源 它跟普通直線定積分的來源完全相彷

讓我們簡短地回憶一下定積分。在橫坐標軸的線段 $[a, b]$ 上取一連續函數 $F(x)$，該函數且具有連續導數 $f(x)$，亦即 $F'(x)=f(x)$（圖 148）。

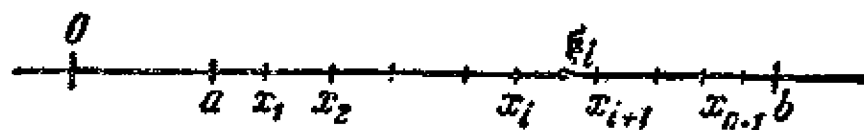


圖 148.

我們曾把這個線段用分點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 分爲一些小線段，並寫出恆等式：

$$F(b)-F(a)=[F(x_1)-F(a)]+[F(x_2)-F(x_1)]+$$
$$+[F(x_3)-F(x_2)]+\cdots+[F(b)-F(x_{n-1})]。$$

依據拉格蘭日中值定理，我們曾把這個和的一般項 $F(x_{i+1})-F(x_i)$ 表達爲

$$F(x_{i+1})-F(x_i)=F'(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

故前面那個恆等式取得下面的形式：

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i。$$

最後令 $n\to+\infty$，且同時令所有線段的長 Δx_i 都趨近於零；取極限，我們得到萊博尼茲-牛頓公式：

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx。$$

它用 $F(x)$ 的導數 $f(x)$，給出了原函數 $F(x)$ 兩個數值的差。

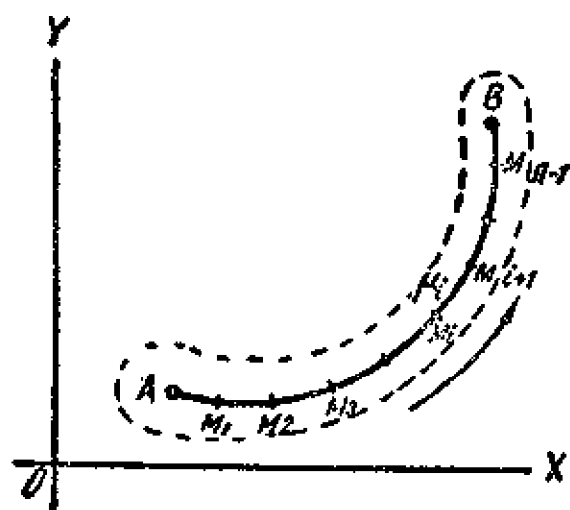


圖 149.

線積分也是這樣產生的。設平面 XOY 上有某條曲線弧 AB，它自己本身不相交而且是"滑溜"的（也就是，沿着這條曲線有連續變化的切線），或者是由有限個這種滑溜弧段組成的。設在該平面 XOY 的弧 AB 上以及其附近，給定了兩個自變量 x 及 y 的一個連續函數，且該函數在弧 AB 上及其附近具有連續的兩個一階偏導數（圖 149）。

我們用分點 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 將 AB 弧分爲 n 個小弧段，這裏 M_i 點具有坐標 x_i 及 y_i。爲使寫法對稱起見，我們把始點 A 及終點 B 也寫

成 $M_0(x_0, y_0)$ 及 $M(x, y)$ 的形式。用 F_i 表示函數 $F(x, y)$ 在 M_i 點的數值，亦即，設 $F_i=F(x_i, y_i)$，$F_0=F(x_0, y_0)$ 及 $F=F(x, y)$，我們就有恆等式：

$$F-F_0=[F_1-F_0]+[F_2-F_1]+[F_3-F_2]+\cdots+[F-F_{n-1}]。\quad (1)$$

這恆等式的一般項 $F_{i+1}-F_i$，詳細寫出來就是：

$$F_{i+1}-F_i=F(x_{i+1}, y_{i+1})-F(x_i, y_i)。$$

根據拉格蘭日中值定理，它恰好等於：

$$F'_x(x_i+\theta_i\Delta x_i, y_i+\theta_i\Delta y_i)\cdot\Delta x_i+F'_y(x_i+\theta_i\Delta x_i, y_i+\theta_i\Delta y_i)\cdot\Delta y_i,$$

其中 θ_i 是介於 0 與 1 間的中值。就幾何意義說，以 $x_i+\theta_i\Delta x_i$, $y_i+\theta_i\Delta y_i$ 爲坐標的點 μ_i 位於連接曲線弧 M_iM_{i+1} 兩端點 M_i 及 M_{i+1} 的弦 M_iM_{i+1} 上。爲簡便起見，我們用 ξ_i 及 η_i 表示 μ_i 點的坐標，即設

$$\xi_i=x_i+\theta_i\Delta k_i,\ \eta_i=y_i+\theta_i\Delta y_i\ 。$$

這樣，我們有

$$F_{i+1}-F_i=F'_x(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta x_i+F'_y(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta y_i,\quad (2)$$

因此，恆等式（1）可寫爲：

$$F(x, y)-F(x_0, y_0)=\sum_{i=0}^{i=n}[F'_x(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+F'_y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]。\quad (1^*)$$

我們注意，等式(1*)是絕對準確的，這是由於點 $\mu_i(\xi_i, \eta_i)$ 是按拉格蘭日中值定理在弦 M_iM_{i+1} 上特別選擇的。假若我們把 $\mu_i(\xi_i, \eta_i)$ 點移到弦 M_iM_{i+1} 上另外的位置，或移到曲線弧 M_iM_{i+1} 上來，則等式(1*)當然受到破壞。可是因爲兩個偏導數 $F'_x(x, y)$ 及 $F'_y(x, y)$ 是連續的，故若所有的弧段 M_iM_{i+1} 愈小，則等式(1*)所受的破壞愈不足道。因此，當我們令 n 無限增加，各弧段 M_iM_{i+1} 無限減小而取極限時，受到破壞的等式(1*)就重新成立了。[1]

等式(1*)的右邊部分，稱爲線積分，記爲：

[1] 我們知道普通定積分中也有這種完全類似的情形。在那裏，拉格蘭日中點 ξ_i 的變動只對取極限前的有限積分和有影響，而對其極限值沒有影響。

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy, \tag{3}$$

故等式(1^*)現在可寫爲:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy_{\circ} \tag{I}$$

通常,以 P 來記偏導數 $\frac{\partial F}{\partial x}$, 以 Q 來記 $\frac{\partial F}{\partial y}$, 隨之, $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 是變量 x 及 y 的兩個連續函數,它們定義在 AB 弧上及其近傍,而且是某個連續函數 $F(x, y)$ 的偏導數:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,. \tag{4}$$

公式(I)現在得到下面的形式:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy, \tag{I*}$$

這裏應當記住,表達式 $Pdx + Qdy$ 是函數 $F(x, y)$ 的全微分。

只有在這個條件下,公式 (I^*) 才眞確,並且在這種情形下,它是萊博尼茲-牛頓公式在曲線的積分路徑上的推廣。假若微分表達式 $Pdx + Qdy$ 不是全微分,則公式 (I^*) 完全沒有意義,因爲雖然右邊的線積分

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy,$$

具有一定的數值,亦卽存在下列積分和的極限,

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i^*, \eta_i^*)\Delta x_i + Q(\xi_i^*, \eta_i^*)\Delta y_i,$$

可是,我們不知道它表示的是什麽,因爲以 $Pdx + Qdy$ 爲全微分的函數 $F(x, y)$, 現在並不存在❶。

因爲 (x_0, y_0) 爲 AB 弧的起點 M_0 的坐標, 而 (x, y) 是其終點 M

❶ 這裏, $\mu_i^*(\xi_i^*, \eta_i^*)$ 點已不是由拉格蘭日定理給出的, [因爲 $Pdx+Qdy$ 並不是全微分,故沒有函數 $F(x, y)$, 所以不能應用這個定理], 而只不過是曲線弧 M_iM_{i+1} 上的任意一點。

的坐標，故公式(I^*)常寫為

$$F(x, y)-F(x_0, y_0)=L\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy, \qquad (I^{**})$$

寫在積分號下上兩端的是積分所在弧段的起點和終點的記號，積分號前括號中的字母，表示了積分的曲線路徑。

常常在圖上，用箭頭指出積分的方向，這個箭頭沿着弧段畫出來，由其起點 M_0 指向終點 M(參閱 149 圖)。

公式(I^{**})指出了，線積分概括了普通的(直線)積分作為其特殊情形，因為當曲線路徑(L)是横坐標軸的一段(線段) $[a, b]$ 時，則在公式(I^{**})中應該去掉字母 y：設 $y=0$, $dy=0$, $P(x, 0)=f(x)$, $F(x, 0)=$ $=F(x)$, $M_0=a$, $M=x$, 那末就得到萊博尼茲-牛頓公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(x)dx 。$$

直線積分與(曲)線積分的差別(只)在於：在直線積分的情形下，微分表達式 $f(x)dx$ 總是某個函數 $F(x)$ 的微分，而在(曲)線積分的情形下，表達式 $Pdx+Qdy$ 很難得是個全微分。為着使它是全微分，則函數 P 及 Q 應適合特殊的條件。

§132. 線積分的計算

這個計算是將所給線積分

$$I=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy, \qquad (5)$$

用公式上的"直化"法做出來，也就是利用適當置換將它化為普通直線積分的方法做出來的。

為此，首先在公式(5)中，將積分變量 x, y 及上限中的變量 x, y 加以區別：

$$I=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\alpha, \beta)d\alpha+Q(\alpha, \beta)d\beta 。 \qquad (5^*)$$

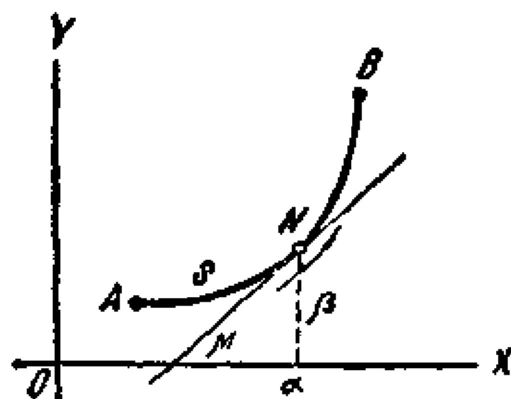


圖 150.

第一種方法 取弧長 $s=AN$ 作爲積分參量 s；弧長 s 是由起點 A 量到畫出 AB 弧的動點 N 的(圖150)。因此 N 點的坐標 α, β 是弧長 s 的函數。將(5*)式中的被積分式乘上 ds 又除以 ds，並記住 $\frac{d\alpha}{ds}=\cos\mu$ 及 $\frac{d\beta}{ds}=\sin\mu$，這裏 μ 是 N 點的切線對於水平線的傾角，隨之它是弧長 s 的一定的函數，我們乃有：

$$I=\int_0^l[P(\alpha,\beta)\cos\mu+Q(\alpha,\beta)\sin\mu]ds。\qquad (6)$$

這裏 l 是整個 AB 弧的長度。

公式(6)把線積分 I 的計算化爲普通定積分的計算。我們注意，這裏 P 及 Q 是 x 及 y 的任何連續函數，故微分表達式 $Pdx+Qdy$ 可能不是全微分。

第二種方法 取任意參量 t 作爲積分參量，因而 α 及 β 都可假定爲 t 的已知函數：

$$\alpha=\varphi(t) \text{ 及 } \beta=\psi(t)。\qquad (7)$$

當 $t=a$ 時，假定 $N(\alpha,\beta)$ 點與 AB 弧的起點 A 重合；當 $t=b$ 時，假定 $N(\alpha,\beta)$ 點到達 AB 弧的終點 B；當 t 由 a 增加到 b 時，假定畫出 AB 弧的 $N(\alpha,\beta)$ 點總是順一個方向由 A 到 B 的。

將線積分(5*)用置換(7)變換一下，得：

$$I=\int_a^b[P\{\varphi(t),\psi(t)\}\cdot\varphi'(t)+Q\{\varphi(t),\psi(t)\}\psi'(t)]\cdot dt。\qquad (8)$$

導數 $\varphi'(t)$ 及 $\psi'(t)$ 預先假定在 $[a\leqslant t\leqslant b]$ 上除有限個點以外是到處連續的，因爲我們假定了 AB 弧或者整個是滑溜的，或者是由有限個滑溜弧所組成的。公式(8)也把線積分的計算化爲普通定積分的計算。

§133．當線積分 $\int Pdx+Qdy$ 不依賴於積分路徑而只依賴於端點的位置時的情形

設 XOY 平面上，有任意一條連續的不自相交割的封閉曲線 K（圖151）。設 K 之內給定兩個函數 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$，它們在每一內點處都是連續的。在這些條件下，在 K 內兩點 M_0 及 M 之間並沿着整個位於 K 內的路徑上取的線積分 $\int Pdx+\int Qdy$，是一個完全確定了的量。但是，假若我們把端點 M_0 及 M 固定起來，改變積分路徑，例如先取路徑 L，後取 L^*，則線積分的值可能改變，因為，一般說來：

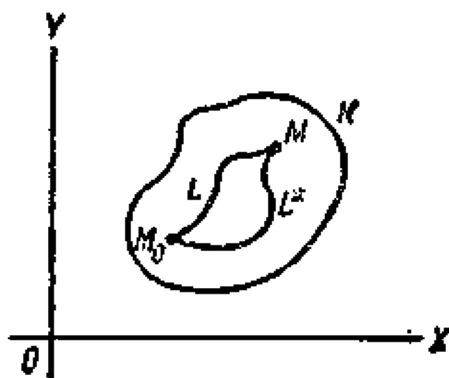


圖 151.

$$(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy \neq (L^*)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy\text{。}$$

對於這種因路徑更換而改變數值的線積分，我們不打算講。因此，我們只問，什麼時候，線積分的值才不依賴於積分路徑 (L) 而只依賴於其端點的位置？

在§131 中證明公式

$$F(x,\ y)-F(x_0,\ y_0)=(L^*)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy, \qquad (I^{**})$$

時，我們已經遇到這種不依賴於積分路徑的積分了；公式 (I^{**}) 中，$F(x,\ y)$ 為兩個自變量 x 及 y 在圍線 K 內的連續函數，並具有兩個連續的一階偏導數⊖，又其中的微分表達式 $Pdx+Qdy$ 是該函數的全微分 dF。

事實上，公式 (I^{**}) 的右邊部分，是圍線 K 內從所給定點 $M_0(x_0,\ y_0)$

⊖ 這句話中的"連續"二字，是譯者加的。——譯者註。

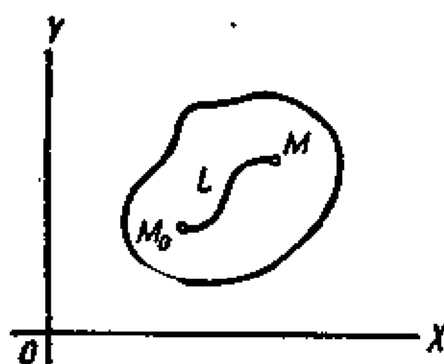


圖 152.

起至任意固定點 M(也是在圍線 K 之內的)的路徑(圖 152) L 上的線積分。這時,關於積分路徑 L 只要求一件事,卽:它應當整個位於圍線 K 之內,沒有任何一點是在圍線 K 上的;至於路徑 L 則可以是任意的。

公式 (I**) 的左邊部分是一個完全不依賴於積分路徑 L 的數量,它只依賴於 L 的端點 M_0 及 M。

爲更好的了解這個特別重要的公式 (I**),我們應當再加一句,卽函數 $F(x, y)$ 的全微分 dF 等於線積分號下的微分表達式 $Pdx+Qdy$,又這種函數雖然有無窮多[假若有一個的話,因爲這種函數 $F(x,y)$ 可能根本不存在],但所有這些函數,彼此只差一個常量,因而它們在所給兩點 M 及 M_0 間的數值差都是一樣的,不論我們取的是哪一個函數 $F(x, y)$ 只要其全微分等於 $Pdx+Qdy$ 就行了。

事實上,假若 $F(x, y)$ 是在圍線 K 內且也以表達式 $Pdx+Qdy$ 爲其全微分的另一個連續函數,則我們有:

$$dF=Pdx+Qdy \text{ 及 } dF^*=Pdx+Qdy,$$

由此 $d(F^*-F)=0$, 隨之,差 F^*-F 是圍線 K 內的連續函數,且在該圍線內其全微分等於零。由此可知,這個差是 K 內的常量,亦卽我們有 $F^*-F=C$, 由此在 K 內處處有 $F^*=F+C$。因此,我們應有等式:

$$F(x, y)-F(x_0, y_0)=F^*(x, y)-F^*(x_0, y_0)$$

故公式(I**)的左邊部分旣不依賴於積分路徑,也不依賴於函數 F 的選擇,而只要該函數的全微分等於 $Pdx+Qdy$。

由上面所講可得定理:

正定理 假若表達式 $Pdx+Qdy$ 在圍線 K 內是全微分,則線積分

$$\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy$$

不依賴於積分路徑 L（這些路徑都從 M_0 點出發，終於 M 點），只要這個路徑整個在圍線 K 內，沒有一點在圍線上。

由上所講，在這種情形下，線積分

$$\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy$$

顯然正好就是圍線 K 內以表達式 $Pdx+Qdy$ 為全微分的那個連續函數。這個函數顯然在 M_0 點等於零。

逆定理 假若線積分

$$\int Pdx+Qdy$$

在圍線 K 內，不依賴於積分路徑，而只依賴於端點的位置，則積分內的表達式 $Pdx+Qdy$ 在 K 內全微分。

證明 設由定點 $M_0(x_0, y_0)$ 取到動點 $M(x, y)$ 的線積分

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy,$$

不依賴於由 M_0 到 M 的積分路徑 L，那末這種線積分應當看作是變量 x 及 y 在圍線 K 內的某個連續函數 $F(x, y)$。現在求它的偏導數 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial F}{\partial y}$。

為求函數 F 的數值 $F(x+\Delta x, y)$，我們應取某條由定點 M_0 出發終於點 $M'(x+$ $+\Delta x, y)$ 的路徑。

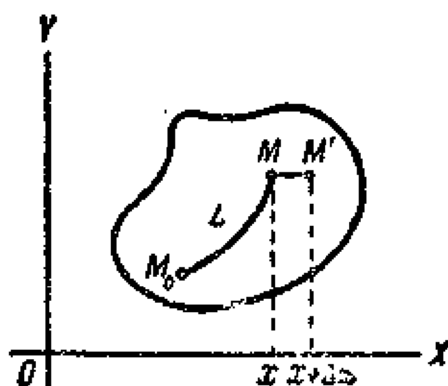


圖 153.

這條路徑可由兩部分組成：一部分是由 M_0 到 M 點的基本路徑 L，另一部分是補加的直線線段 MM'（圖153）。因此，我們有：

$$F(x+\Delta x, y)=(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdx+(MM')\int_{M}^{M'} Pdx+Qdy=$$
$$=F(x, y)+\int_{x}^{x+\Delta x} P(\alpha, y)d\alpha,$$

因爲沿着線段 MM'，我們有 $dy=0$，這是由於 y 是一個常數，而積分變量 α 則由 x 變到 $x+\Delta x$。

故
$$\frac{F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}P(\alpha,\ y)d\alpha\ 。$$

因爲 P 是圍線 K 內的連續函數，所以這等式的右邊部分介於函數 $P(x,\ y)$ 在線段 MM' 上的最大值與最小值之間：這個論斷乃是積分的中值定理（參閱 §35）。當 $\Delta x\to 0$ 時，由於函數 P 是連續的，故函數 P 在線段 MM' 上的最大與最小值都趨近於函數 P 在 M 點的數值作爲其極限：隨之，我們有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)}{\Delta x}=P(x,\ y)。$$

換言之，我們求得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\ 。\tag{1}$$

用類似的方法，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=Q\ 。\tag{2}$$

由此可知，表達式 $Pdx+Qdy$ 是線積分

$$\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}Pdx+Qdy,$$

作爲其上限 $M(x,\ y)$ 的函數看待時的全微分。

由此得到在物理學上特別有用的重要定理如下：

定理　表達式 $Pdx+Qdy$ 在圍線 K 內爲全微分的充分與必要條件是：該表達式在圍線 K 內任意封閉曲線上的積分都等於零。

證明　事實上，根據前述正逆兩定理，欲使表達式 $Pdx+Qdy$ 在圍線 K 內是全微分，充分與必要條件是：在任意兩條由 M_0 點到 M 點的路徑 L 及 L^* 上的線積分。

$$(L)\int_{M_0}^{M}Pdx+Qdy\ 及\ (L^*)\int_{M_0}^{M}Pdx+Qdy,$$

數值上都是相等的（圖 154）。因為顛倒線積分的上下限，相當於改變該積分的方向，也就是相當於改變所有積分元素的正負號，而不會改變其絕對值，故有：

$$(L)\int_{M}^{M_0} Pdx+Qdy=-(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy$$

由此，若用 Γ 表示封閉的積分路徑

$$M_0A^*MAM_0,$$

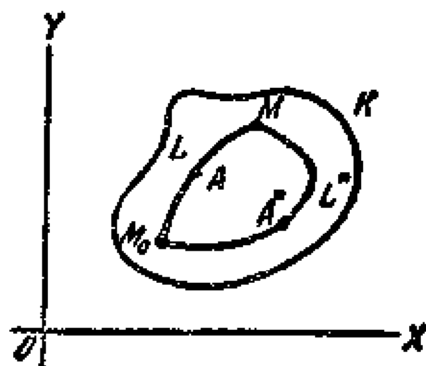


圖 154.

則得等式：

$$(\Gamma)\int Pdx+Qdy=(L^*)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy+(L)\int_{M}^{M_0} Pdx+Qdy=$$

$$=(L^*)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy-(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy=0,$$

因減式與被減式相等。

因此，說線積分不依賴於積分路徑的形狀，就等於說：沿任意封閉路徑 (Γ) 的線積分 $(\Gamma)\int Pdx+Qdy$ 等於零。這就證明了本定理。

註　當圍線 K 包圍了沒有空洞的面積 S 時，亦即當圍線連續，而沒有任何彼此分離的弧段時，則上述重要定理，毫無保留地成立。隨之，我們假定了圍線 K 可以用鉛筆尖不脫離紙面連續運動一起畫成的。例如當 K 為圓或橢圓時就有這種情形。

當圍線 K 包圍了有空洞的面積 S 時（圖 155 上方），則上述定理就不成立了。在這種情形，圍線 K 係由幾個各個彼此孤立的曲線 K_1、K_2 及 K_3 所組成，因為這個圍線既要作為面積 S 的外界線，又同時須作為其空洞的界線：$K=K_1+K_2+K_3$。對於這種圍線 K，定理很可能是不成立的，因為取線積分 $(\Gamma')\int Pdx+Qdy$ 時的封閉路徑 (Γ')，可能包圍了空洞，這時，這個積分就可能異於零了。它只能在一種情形下才是零，即當曲線 Γ' 可以用連續運動收縮到面積 S 內的一點，而在收縮過程中不掠過該面積 S 上的空洞。這種積分 $(\Gamma')\int Pdx+Qdy$ 一定是零。

例　表達式

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

是函數 $\arc\tan\frac{y}{x}$ 的全微分。這是容易證明的，因為

$$d\arctan\frac{y}{x}=\frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

但若以原點 O 爲中心以任意長 R 爲半徑作圓 Γ，那末這表達式在圓周上 Γ 的線積分就不等於零而等於 2π。這也是容易證明的。我們設

$$I=(\Gamma)\int\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\beta.$$

取半徑 ON 與 OX 正軸所作成的角 θ 爲積分參量，我們有

$$\alpha=R\cos\theta,\ \beta=R\sin\theta,\ d\alpha=-R\sin\theta\,d\theta,\ d\beta=R\cos\theta\,d\theta,\ \alpha^2+\beta^2=R^2.$$

代入後求得：

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{-R\sin\theta\cdot-R\sin\theta}{R^2}d\theta+\frac{R\cos\theta\cdot R\cos\theta}{R^2}d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$

看起來，這與上面定理中所講：積分 $(\Gamma)\int Pdx+Qdy$ 在任意封閉路徑 Γ 上均應爲零的話相矛盾。但這可以解釋如下：在所討論的情形中，函數

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2}\ \text{及}\ Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

在原點(亦卽在 $x=0,\ y=0$ 點)是不連續的。因此面積 S，若要使 P 及 Q 兩個函數在其內每一點都是連續的話，決不能包含原點 O。假若我們取所謂"環"作爲這種面積 S，亦卽取平面上介於兩個同心圓 K_1 及 K_2 之間的部分(圖 155 下方)作爲 S，那末這個面積 S 的裏面就有一個空洞；這面積 S 的圍線 K 是間斷的，因爲它是由兩個同心圓 K_1 及 K_2 所組成的：$K=K_1+K_2$。因此，沒有任何理由可以期待那在含有空洞的圓 Γ 上的積分 $I=(\Gamma)\int Pdx+Qdy$ 會等於零。因此我們得到 $I=2\pi$。

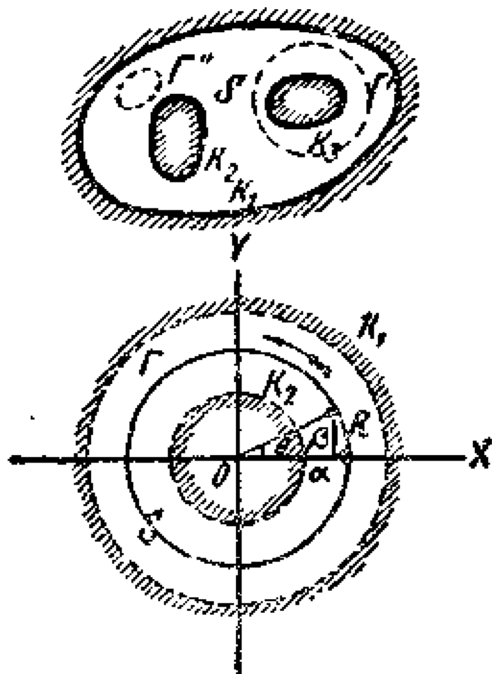


圖 155.

§134. 全微分的解析檢驗法

這個解析檢驗法非常簡單，是由下面的定理所給出的。

定理 欲使表達式 $Pdx+Qdy$(其中 P、Q 及它們的一階偏導數，是在圍線 K 內的連續函數)在圍線 K 內處處爲某連續函數 $F(x,y)$ 的全微分，充分與必要

條件是：在圍線 K 內，處處都應滿足恆等式：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

這個條件是必要的。

事實上，假若表達式 $Pdx+Qdy$ 是某連續函數 $F(x, y)$ 的全微分，則我們應有恆等式

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=Pdx+Qdy.$$

由此得
$$\frac{\partial F}{\partial x}=P,\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q。$$

但偏導數 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ 的數值不依賴於微分的次序，故在圍線 K 內處處都有恆等式：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

它顯然可以改寫為：
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}。$$

充分條件的證明要難得多，這需要一個預備定理。

預備定理 假若在圍線 K 內處處都有恆等式：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

又假若 π 是整個包含在圍線 K 內的任一矩形，其四邊各平行於坐標軸，則表達式 $Pdx+Qdy$ 在整個矩形 π（包括其周邊）上是全微分。

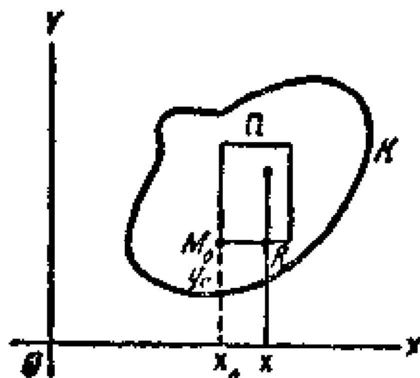


圖 156.

證明 我們取矩形 π 的左下角 $M_0(x_0, y_0)$ 點，作為積分路徑的起點，又取該矩形的任一點 $M(x, y)$ 作為終點。積分路徑 L 則由兩直線組成，其一為水平線 M_0R，其二為垂直線 RM（圖 156）。

我們有:

$$I(x, y)=(L)\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy=\int_{x_0}^{x} P(\alpha, y_0)d\alpha+\int_{y_0}^{y} Q(x, \beta)d\beta。$$

很明顯，$I(x, y)$ 是 π 上處處連續的函數。現在來計算 $I(x, y)$ 的一階偏導數。

我們有:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=P(x, y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q(x, \beta)}{\partial x}d\beta=P(x, y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial P(x, \beta)}{d\beta}d\beta=$$

$$=P(x, y_0)+P(x, y)-P(x, y_0)=P(x, y)$$

及

$$\frac{\partial I}{\partial y}=Q(x, y)。$$

由此而知，表達式 $Pdx+Qdy$ 在 π 上處處是連續函數 $I(x, y)$ 的全微分。 (證明完畢)

現在我們轉過來證明前面定理的第二部分。

條件是充分的。
設在圍線 K 內，處處都滿足恆等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}。$$

我們要證明，表達式 $Pdx+Qdy$ 在圍線 K 的整個內部是全微分。爲此，只須證明圍線 K 內任意封閉曲線 Γ 上的線積分。

$$(\Gamma)\int Pdx+Qdy$$

都等於零。

這裏需要先說明一件事：設 S 及 S^* 爲任意的兩塊面積，各被圍線 $ABCA$ 及 $DCBD$ 所包圍，且具有公共界線 BC。

設 I 及 I^* 是表達式 $Pdx+Qdy$ 在這兩個圍線上的線積分，而且，積分是按圍線的正方向取的，所謂正方向是指這種方向，當我們依照這個方向在圍線上走時，它所包圍的面積總在我們的左邊。在 157 圖中，每個積分的方向都用箭頭表示出來了。顯然，在這種情形，沿着公共界

線 BC 來回各走了一遍；極其要緊的是以相交的方向的各走了一遍。因此，把積分 I 及 I^* 加起來，我們有：

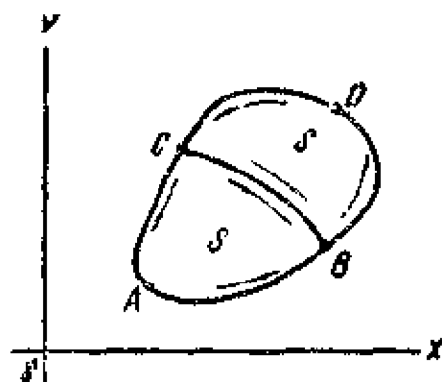


圖 157.

$$I+I^*=(ABCA)\int Pdx+Qdy+(DCBD)\int Pdx+Qdy=(ABDCA)\int Pdx+Qdy, \quad (I)$$

因爲公共界線 BC 上的來回兩次積分，由於方向相反，彼此抵消了。

公式（I）證明了，在包圍面積 S 的圍線上的線積分，加上在包圍面積 S^* 的圍線上的線積分，等於在包圍面積 $S+S^*$ 的圍線上的線積分。

這時，應當再指出：所有這三個在封閉圍線上的積分，都是依正方向取的。

我們應用這個來證明：條件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

是使表達式 $Pdx+Qdy$ 爲全微分的充分條件。

設 K 爲任意一個連續的且不與本身相交的封閉曲線（圖 158）。設在 K 內函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 及其一階偏導數都是連續的，且滿足恆等式：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}。\quad (1)$$

我們要證明，在這些條件下，在圍線 K 的整個內部，表達式 $Pdx+Qdy$ 是一個全微分。這就是說，存在某個函數 $F(x, y)$，它在 K 內，處處有定義，它的本身和它的一階導數都是連續的，且在 K 內處處適合恆等式：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P \text{ 及 } \frac{\partial F}{\partial y}=Q。\quad (2)$$

亦卽恆等式

$$dF=Pdx+Qdy。\quad (3)$$

我們知道，爲此，只要證明在整個位於 K 內的任意一條連續封閉

曲線 Γ 上的線積分 $(\Gamma)\int Pdx+Qdy$ 等於零。

把這條曲線(Γ)畫出來。既然它整個位於圍線 K 內，故(Γ)所包圍的面積 S，對於圍線 K 的接近程度，沒有一處是小於距離 δ 的，這裏 δ 是某個固定的正數：$\delta>0$。

這表示了，對角線小於 δ 的每個矩形，若包含了面積 S 中的點，應整個位於圍線 K 內。

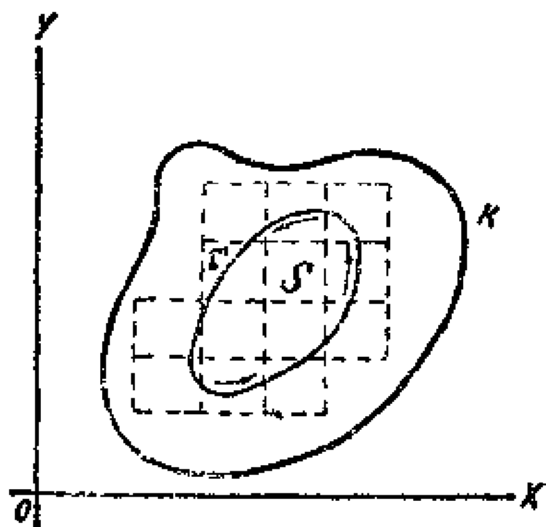


圖 158.

將平面分爲許多矩形，矩形的對角線都小於 δ。顯然，若這些矩形包含了面積 S 的點，則由上所講，可知它是整個在 K 之內的（圖 158）。

另一方面，由預備定理我們知道：在每一個位於 K 內的矩形 π 上，表達式 $Pdx+Qdy$ 是全微分。這表示了，沿着任意的封閉圍線 γ，只要它不超出矩形 π 的周邊，線積分都等於零：

$$(\gamma)\int Pdx+Qdy=0\text{。}$$

由此可知，若我們取那些與面積 S 有公共點的矩形，並在 S 中爲這些矩形所割下來的每塊面積❶的圍線 γ 上，依着正方向取積分，那末

❶ 應該知道，我們可以假定：在所取的每個矩形中，只含有面積 S 的一整塊。當這個矩形不超出圍線(Γ)時，這是很明顯的，因爲這時整個矩形的內部就是面積 S 的一整塊。因此只對於那些有一部分超出於圍線 Γ 的矩形(Π)，才是不明顯的。但是，在這種情形，應當考慮到圍線 Γ 的性質；這個圍線是：或者整個滑溜的，或者由有限個滑溜弧段所組成的。因此，它可以分爲有限個足夠小的滑溜弧段，使得沿着每個弧段切線斜率的變化不超過 ϵ，這裏 ϵ 是任意小的定數，$\epsilon>0$。在這些條件下，整個圍線 Γ 很像尋常的多邊形。就多邊形圍線 Γ 說，將平面 XOY 分爲許多矩形，使得每個矩形只從 S 割出一整塊來，是容易辦到的。這時甚至可使有一部分超出 Γ 的所有矩形 Π，做成正方形。

這個作法對於曲線形的圍線 Γ 照樣有效，並給出了具有這種性質的諸矩形 Π（參閱 158 圖）。

所有這些線積分都等於零：

$$(\gamma)\int Pdx+Qdy=0\ 。$$

所以它們的和也是零。但是按照前面所講的，把這些線積分相加時，在面積 S 的這些小塊的公共界線上的積分，將互相消去，因爲來回兩次的積分方向相反。隨之，伸入面積 S 內部的所有積分路徑，也就是將面積 S 分爲小塊的那些路徑，自相消去，而面積 S 的那些小塊又合而爲一了。所未曾消去的，只是包圍了整個面積 S 的圍線 Γ 上取正方向的各弧段。但因爲這些弧段上的線積分之和就是在整個封閉圍線 Γ 上依正方向取的線積分：

$$(\Gamma)\int Pdx+Qdy,$$

故這個積分應等於零，這就證明了本定理。

推論 我們有：

假若連續函數 P 及 Q，具有連續的一階偏導數，在圍線 K 內適合條件：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

則表達式 $Pdx+Qdy$ 是一個全微分，這時它的線積分

$$\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} Pdx+Qdy,$$

不依賴於積分路徑，並給出了所求的函數 $F(x,y)$：這個函數在 $M_0(x_0,y_0)$ 點等於零，其全微分 dF 等於表達式 $Pdx+Qdy$。

§135. 線積分依賴於路徑的情形．力所作的功

如果微分表達式 $$Pdx+Qdy \tag{1}$$

的可積分條件 $$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{2}$$

不能滿足，那末我們知道，不可能指望全微分方程

$$dz = Pdx + Qdy \tag{3}$$

會定出兩個自變量的（亦即平面上一塊區域上的）一個函數 $z(x, y)$。可是，在任一條我們預先選擇好的曲線 L 上，微分方程（3）是可以滿足的：爲此只要寫出線積分

$$z = z_0 + (L)\int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy \tag{4}$$

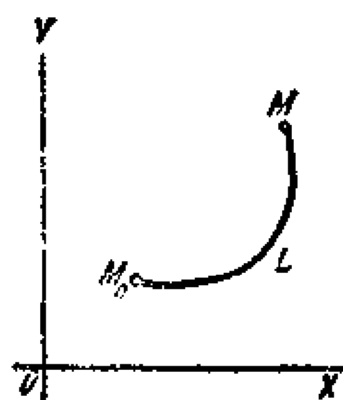


圖　159.

於是我們得到一個定義在曲線 L 上的函數 z，該函數在起點 $M_0(x_0, y_0)$ 取得所給的初值。且在曲線 L 上適合微分方程（3）（圖 159）。

可是，我們要知道，由線積分（4）所定義的變量 z，並不是點 $M(x, y)$ 在其一切坐標 x 與 y 處的函數；變量 z 不僅依賴於曲線上終點 M 的位置，而且還依賴於曲線 L 本身。如果設想 M_0 點在平面上沿着曲線 L 移動，最後達到 M 點，那末可以說，若要知道 z 的數值，不僅要知道 M 點的位置，而且應當還知道它的歷史，也就是，應當知道它離開最初位置 M_0 後陸續取得的位置。如果點 M 在以前取得曲線 L 上的一系列位置，這以前所取位置的痕跡，就會對現時變量 z 的數值有影響，從這個意義來講，那就可以說，線積分（4）表示了一種"遺傳現像"。

線積分的另一個解釋是力學中很重要的功的概念。

假若在 $M(x, y, z)$ 點上作用了力 F（F 在坐標軸上的分量爲 X, Y, Z），又假若 M 點在空間畫出了某條曲線 L，它在無限小的時間中，由位置 M 移動到位置 M'，則力 F 所作的所謂功元素，乃乘積 $F \cdot MM' \cdot \cos(F, MM')$，亦即 $F\,ds\cos(F, ds)$，因爲無限小的弦 MM' 及弧 MM' 是彼此相當的（圖 160）。

同樣，若以 dx, dy, dz 表示位移 MM' 在坐標軸上的射影，則功元素的表達式爲：

$$Xdx+Ydy+Zdz\text{。}$$

所謂力 F 沿着 M_0M 弧所作的功，乃沿着這個弧的功元素的和，亦卽空間的線積分：

$$I=(L)\int_{M_0}^{M} Xdx+Ydy+Zdz,$$

它可以寫爲：

$$I=(L)\int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} Xdx+Ydy+Zdz$$

這是在以 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 爲起點，$M(x,\ y,\ z)$ 爲終點的曲線弧 L 上取的積分(圖 161)。

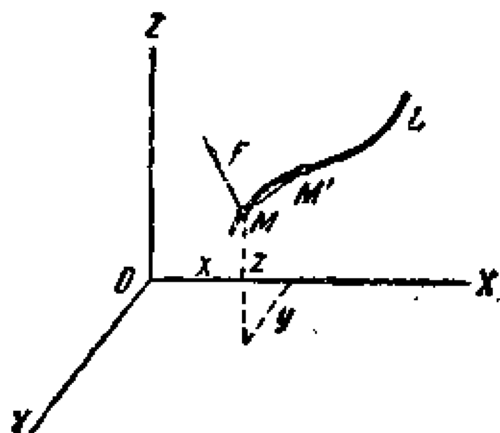


圖 160.

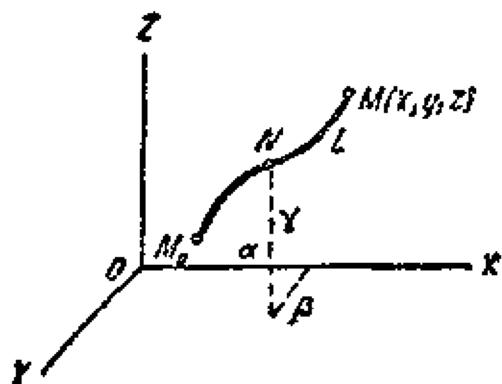


圖 161.

空間線積分 $\int Xdx+Ydy+Zdz$ 的計算一如平面線積分 $\int Pdx+Qdy$。這就是，取空間曲線 L 的參量方程：

$$\alpha=\varphi(\tau),\quad \beta=\psi(\tau),\quad \gamma=\omega(\tau)$$

(圖 161)，於是，在線積分 I 中作這個置換後，可寫：

$$I=(L)\int_{M_0}^{M} X\,d\alpha+Y\,d\beta+Z\,d\gamma=$$

$$=\int_{t_0}^{t}[X\varphi'(\tau)+Y\psi'(\tau)+Z\omega'(\tau)]d\tau,$$

這裏假定了，當 $\tau=t_0$ 時得到 L 弧的起點 M_0，又當 $\tau=t$ 時得到其終點 M。

§136. 奧斯特羅格勒斯基公式

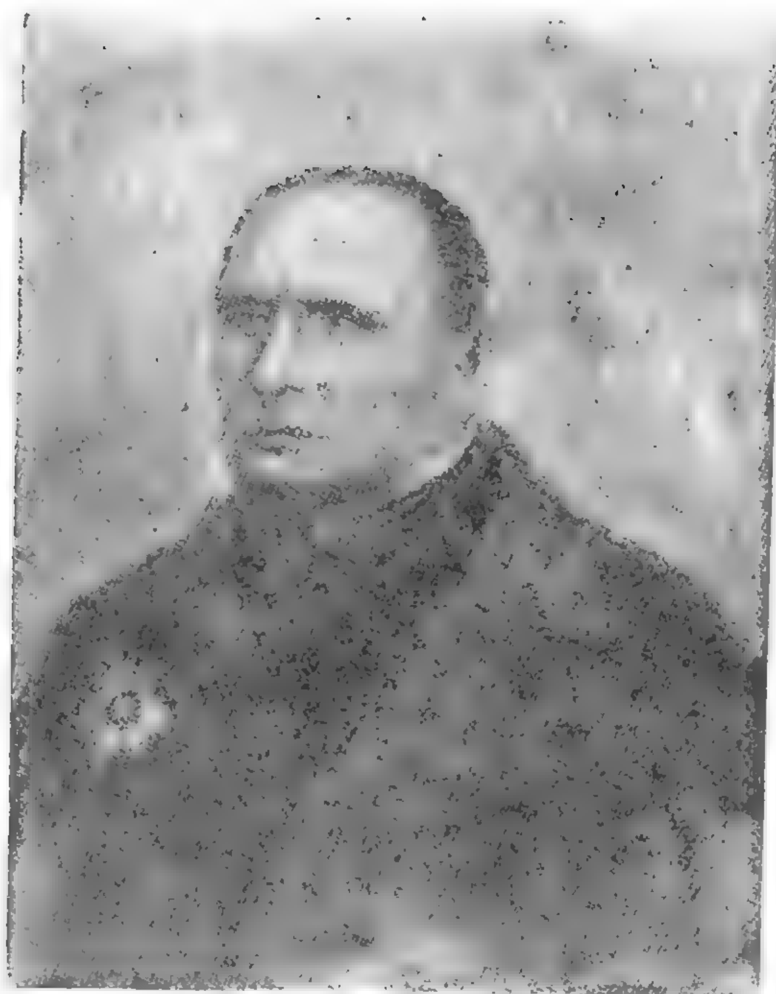
奧斯特羅格勒斯基曾求得在可積分條件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 不滿足的一般情形下，沿着封閉圍線 Γ 的線積分

$$I=(\Gamma)\int Pdx+Qdy$$

的準確數值。

設函數 P、Q 及其所有一階導數在圍線 K 內都是連續的。設 Γ 是整個位於 K 內的任意一條封閉而不自相交割的曲線。我們用 S 表示曲線 Γ 所圍部分的平面。

將平面 XOY 分爲許多矩形，其各邊均平行於坐標軸，又其對角線



M. B. 奧斯特羅格勒斯基

小於定數 δ，$\delta>0$。由這些矩形中我們只取含有面積 S 的點的矩形。這些矩形將面積 S 割爲小塊。假若我們沿着面積 S 的這些小塊的圍線 (γ)，各依正方向求線積分 $(\gamma)\int Pdx+Qdy$，然後再把這些線積分加起來，則按§134，它們的和就恰好等於表達式 $Pdx+Qdy$ 沿着圍線 Γ 依正方向求的線積分，隨之，我們有：

$$\sum(\gamma)\int Pdx+Qdy=$$
$$=(\Gamma)\int Pdx+Qdy。\qquad (1)$$

我們現在應當估計左邊各項的數值。

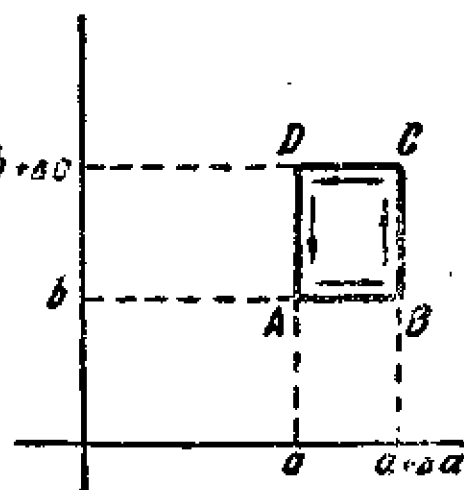


圖 162.

第一種情形 所討論的矩形是不超出圍線 Γ 的。設 $ABCD$ 爲這種矩形(圖 162)。

我們有：

$$I_{(ABCDA)}=\int Pdx+Qdy=\int_0^{\Delta a}P(a+t,\ b)dt+$$
$$+\int_0^{\Delta b}Q(a+\Delta a,\ b+t)dt-\int_0^{\Delta a}P(a+t,\ b+\Delta b)dt-$$
$$-\int_0^{\Delta b}Q(a,\ b+t)dt=-\int_0^{\Delta a}[P(a+t,\ b+\Delta b)-P(a+t,\ b)]dt+$$
$$+\int_0^{\Delta b}[Q(a+\Delta a,\ b+t)-Q(a,\ b+t)]dt。$$

應用拉格蘭日中值定理，求得：

$$I=-\Delta b\cdot\int_0^{\Delta a}P'_y(a+t,\ b+\theta_1\Delta b)dt+$$
$$+\Delta a\cdot\int_0^{\Delta b}Q'_x(a+\theta_2\Delta a,\ b+t)dt,$$

其中 θ_1 及 θ_2 都是正的而且都 <1。

因爲 P'_y 及 Q'_x 爲連續函數，故可引用定積分中值定理(參閱§35)，我們求得：

$$I=-\Delta b\cdot\Delta a\cdot P'_y(a+\theta_3\Delta a,b+\theta_1\Delta b)+\Delta a\cdot\Delta b\cdot Q'_x(a+\theta_2\Delta a,b+\theta_4\Delta b)=$$
$$=|Q'_x(a+\theta_2\Delta a,\ b+\theta_4\Delta b)-P'_y(a+\theta_3\Delta a,\ b+\theta_1\Delta b)|\cdot\Delta a\Delta b\text{。}$$

我們注意，方括號中的減數與被減數，是導數 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在矩形 $ABCD$ 內的某兩點處的數值。

因此，假若我們取所有這種矩形 $ABCD$，並做出它們的對應線積分 $(ABCD)\int Pdx+Qdy$ 之和，且令正數 ε 無限接近於零，則由二重積分的定義 (§119)。我們有：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sum(ABCDA)\int Pdx+Qdy=\int_S\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\text{。}\qquad(2)$$

第二種情形 所討論的矩形，有一部份超出圍線 Γ 之外。我們從 §134 (請參閱脚註) 中知道，我們總可以假定這種矩形 π：或者是正方形。或者是由兩個在公共邊處連在一起的同大的正方形所組成，同時，交割這塊面積的圍線 Γ 的弧，連結了兩個對邊上的點 A 及 B (圖 163)。

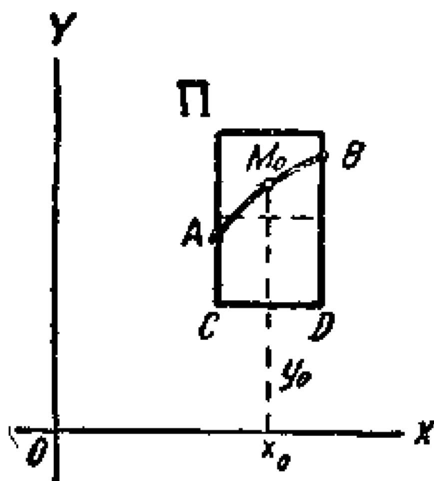


圖 163.

由此可知，S 中被矩形 π 割切下來的一塊面積的圍線(γ)之長，不超過圍線 Γ 的 AB 弧長的六倍。因此 S 中被 π 這些矩形割切下來的各塊面積的所有圍線(γ)的總長，不超過 $6L$，這裏 L 是圍線 Γ 的長。

再看在圍線 γ 上依正方向求的積分 $(\gamma)\int Pdx+Qdy$。設 $M_0(x_0,y_0)$ 爲 AB 弧的任意一點(圖 163)。以 P_0 及 Q_0 表示函數 P 及 Q 在 M_0 點的數值，我們有：

$$(\gamma)\int Pdx+Qdy=(\gamma)\int P_0dx+Q_0dy+$$
$$+(\gamma)\int(P-P_0)dx+(Q-Q_0)dy\text{。}\qquad(3)$$

等式(3)右邊的第一個積分，顯然等於零，因爲圍線 γ 是封閉的，而被積分式 P_0dx+Q_0dy 是一個全微分。右邊的第二個積分非常小，因爲

每一個矩形 π 的對角線小於 δ，而 δ 是一個任意小的定數。由此而知，在整個矩形 π 上，我們有不等式：

$$|P-P_0|<\varepsilon \text{ 及 } |Q-Q_0|<\varepsilon$$

這裏 $\varepsilon>0$ 是任意小的一個定數。

因此，我們看到，這個積分的絕對值不能大於

$$(\gamma)\int\varepsilon|dx|+\varepsilon|dy|<(\gamma)\int\varepsilon\cdot ds+\varepsilon\cdot ds=2\varepsilon\cdot(\gamma)\int ds,$$

其中 ds 是圍線 γ 的弧微分。

於是，根據前面講的，對應於矩形 π 的各圍線 γ 上的所有這種線積分之和 $\sum(\gamma)\int Pdx+Qdy$，不能大於

$$2\varepsilon\sum(\gamma)\int ds<\varepsilon\cdot 12\cdot L$$

這裏 L 是整個圍線 Γ 的長。因爲 ε 是任意的小，故我們看到

$$\lim\sum(\gamma)\int Pdx+Q\,dy=0, \tag{4}$$

這裏的和是在那種有一部分超出 Γ 的所有矩形 π 上求的。

最後，比較等式（1），（2）及（4），我們看到。

$$(\Gamma)\int Pdx+Q\,dy=\iint_{\pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy。 \tag{5}$$

而這正好就是奧氏公式。

推論 由奧氏公式（5）立即可得我們已經有的定理：欲使圍線 K 內任意封閉曲線 Γ 上的積分 $(\Gamma)\int Pdx+Q\,dy$ 等於零，充分與必要條件是，在圍線 K 內等式 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 處處成立。

充分性很顯然，因爲當這個等式滿足時，二重積分的被積分式等於零。

必要性也很顯然，這是因爲，假若在 K 內某一點 $M_0(x_0, y_0)$ 處，差 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 異於零，比方說是正的，則由於我們已假定函數 P 及 Q 及其

一階導數是連續的，故在 M_0 點附近有不等式 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$。但若取半徑 ρ 充分小且中心在 M_0 的圓 Γ，則在 Γ 之內（5）式的二重積分為正數，於是根據奧氏定理，就不可能使該式左邊的線積分為零。

§137. 左邊為全微分的微分方程

我們知道，每個一階微分方程總可以寫為：

$$Pdx+Qdy=0, \tag{1}$$

其中 P 及 Q 為兩個自變量 x 及 y 的函數。

假若表達式 $Pdx+Qdy$ 是一個全微分，也就是，假若存在自變量 x 及 y 的某個函數 $F(x, y)$，使

$$dF=Pdx+Qdy, \tag{2}$$

則所給的微分方程（1）指出了，在它的每個解 $y(x)$ 上，我們有 $dF=0$，於是在解 $y(x)$ 上函數 $F(x, y)$ 保持為常量。

這告訴我們，微分方程（1）的解 $y(x)$，現在可以從普通方程

$$F(x, y)=C, \tag{3}$$

得到，其中 C 為常量。

設 C 為任意的常量，我們就得到微分方程（1）的所有的解 $y(x)$，所以（3）是一般解。

由上述種種，我們知道：

（1）欲使微分方程（1）的左邊為全微分，則必須而且只要有恆等式 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$；

（2）當這恆等式成立時，我們所需要的函數 $F(x, y)$，就只要沿着起點 $M_0(x_0, y_0)$ 到 $M(x, y)$ 點的任意路徑 L 上求出線積分

$$L\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

便可得到，這時，在圍線 K 內，所得結果並不依賴於積分路徑 L。又若根據 §134，求出下列兩個積分：

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(\alpha, y)d\alpha+\int_{y_0}^{y} Q(x, \beta)d\beta+C。$$

也可以得到函數 $F(x, y)$。

§138. 積分因子

假若表達式 $Pdx+Qdy$ 不是一個全微分，那就自然要來找出一個因子 $\mu(x, y)$，使得原來的表達式乘上 μ 之後，所得到的新表達式 $\mu Pdx+\mu Qdy$ 變成全微分。這個因子 μ，稱爲積分因子，求這個積分因子 μ 的用處在於：原來的及新的微分方程

$$Pdx+Qdy=0 \text{ 及 } \mu Pdx+\mu Qdy=0$$

本質上是同一個方程，但是新方程跟任何全微分方程一樣，只要求兩次不定積分便可積出。

欲使新的方程

$$\mu Pdx+\mu Qdy=0 \tag{1}$$

爲全微分，則必須而且只要有恆等式

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}$$

或

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}-\mu\frac{\partial Q}{\partial x}=Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{2}$$

於是，積分因子 $\mu(x, y)$ 乃偏微分方程（2）的解，反過來，偏微分方程（2）的每一個解 $\mu(x, y)$，是表達式 $Pdx+Qdy$ 的積分因子。

在更完全的教科書中，可證明方程（2）恆有解，所以每一個表達式 $Pdx+Qdy$ 恆具有積分因子 $\mu(x, y)$。

凡可用不定積分法積到底的大多數微分方程

$$Pdx+Qdy=0, \tag{3}$$

都是具有已知的積分因子 μ 的。

例 1 齊次方程 $Pdx+Qdy=0$，其中 P 及 Q 都是 x 及 y 的 m 次齊次函數，具有積分因子 $\dfrac{1}{Pdx+Qdy}$。

證明　先講一講齊次函數的典型性質。假若 $f(x, y)$ 是自變量 x 及 y 的 m 次齊次函數，那就表示了，若以任意數 t 乘 x 及 y，則仍然得到函數 $f(x, y)$，不過多了一個因子 t^m。

例如，函數 $2x^3+5xy^2-7x^2y$ 爲三次齊次函數，因為以 t 乘其自變量 x 及 y 後，得

$$2(xt)^3+5(xt)(yt)^2-7(xt)^2(yt)=t^3(2x^3+5xy^2-7x^2y)。$$

因此，若 $f(x, y)$ 是 m 次齊次函數，那就表示有三個字母 x, y, t 的恆等式

$$f(xt, yt)=t^m\cdot f(x, y)。\tag{4}$$

將它對 t 微分，得：

$$xf'_x(xt, yt)+yf'_y(xt, yt)=mt^{m-1}f(x, y)。$$

設 $t=1$，得到 x 及 y 的恆等式：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=mf(x, y)。\tag{5}$$

現在我們來看因子 $\frac{1}{Px+Qy}$ 是否確爲表達式 $Pdx+Qdy$ 的積分因子。

我們有
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q}{Px+Qy}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot(Px+Qy)-PQ-Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{(Px+Qy)^2}=$$

$$=\frac{\left(P\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)-PQ}{(Px+Qy)^2}。$$

同樣有
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{P}{Px+Qy}=\frac{y\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-PQ}{(Px+Qy)^2}。$$

由此得

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q}{Px+Qy}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{P}{Px+Qy}=\frac{P\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{(Px+Qy)^2}。$$

但由於函數 Q 是齊次的，第一個括號等於 mQ；又由於函數 P 是齊次的，第二個括號等於 mP，這裏 m 是齊次函數的次數。故上面的表達式等於 $\frac{mPQ-mQP}{(Px+Qy)^2}=0$。所以 $\frac{1}{Px+Qy}$ 是積分因子。

例 2　求線性方程 $\frac{\partial y}{\partial x}+Py=Q$ 的積分因子，其中 P 與 Q 只是變量 x 的函數。

解　將所給的線性方程改寫爲：

$$dy+(Py-Q)dx=0。$$

假若 μ 爲積分因子，我們應用：

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}(Py-Q)+\mu P。$$

求出只依賴於 x 的積分因子 μ，我們就滿足了這個方程。故有 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，上面的方程就可寫爲

$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu P$，也就是 $\frac{d\mu}{\mu}=Pdx$，由此得

$$\ln\mu=\int Pdx,\text{ 於是 }\mu=e^{\int Pdx}。$$

將全微分
$$e^{\int Pdx}dy+e^{\int Pdx}(Py-Q)dx$$
按§137所講的法則積分，求得

$$ye^{\int Pdx}-\int Qe^{\int Pdx}dx=C。$$

由此得到以前曾得到過的一般解：

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right)。$$

第十一章　福里哀級數

§139. 三角級數

所謂三角級數乃具有下面形式的級數:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \tag{1}$$

其中常數 $a_0, a_1\cdots$ 及 $b_1, b_2, \cdots$ 稱爲三角級數的係數。我們假定這些係數以及變量 x 都是實數。

假若三角級數(1)對於 x 的每個數值都收斂,則其和依賴於 x, 我們用 $f(x)$ 來記:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \tag{2}$$

這時,我們說函數 $f(x)$ 展成三角級數。顯然, $f(x)$ 是以 2π 爲週期的週期函數。

在科學與技術上,爲許多純粹實用的目的,常要把預先給好的以 2π 爲週期的函數 $f(x)$ 展爲三角級數。爲此,我們應會作兩事:

第一　應當會按所給的函數 $f(x)$,求得它所應展成的三角級數的諸係數。

第二　應當會證明:這樣求得的三角級數,確是收斂的,而且它的和恰好就是我們所要展開的那個所給的函數 $f(x)$。

我們現在來解決這兩個問題。

§140. 福里哀公式

第一個問題非常簡單。首先,三角級數(1)不應在整個 OX 軸上,而只應在長爲 2π 的某一線段上來考察。因爲,假若我們把 x 的數值加

2π 或減 2π，級數的各項並不改變，因爲它們都是以 2π 爲週期的週期函數。事實上，我們有恆等式：

$$a_n\cos(x\pm 2\pi)+b_n\sin(x\pm 2\pi)=a_n\cos x+b_n\sin x。$$

因此一般只在線段 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, +\pi]$ 上來討論三角級數，因爲在這些線段外討論這些級數是多餘的。

若三角級數的和 $f(x)$ 已經給定，要找出公式，根據它來計算該三角級數中的係數 a_n 及 b_n，我們首先取已知爲收斂，也就是應具有確定和 $f(x)$ 的這樣一個三角級數：這就是係數絕對值所組成的級數 $\frac{|a_0|}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ 爲收斂的所謂絕對收斂的三角級數。

假若係數絕對值所組成的級數收斂，則三角級數（1）顯然也是收斂的；而且，它又是在線段 $[0, 2\pi]$ 上正規收斂的［參閱 §78］，因爲其一般項 $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ 滿足不等式：

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|。$$

顯然，這種三角級數，在線段 $[0, 2\pi]$ 上是均勻收斂的，所以它的和 $f(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的連續函數。

爲着要從三角級數的和 $f(x)$ 來求三角級數，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+ \\ +(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots+ \qquad (2)$$

中的諸係數，我們首先要記住下列幾個等式：

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0,\text{ 其中 } m\neq n,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0,\text{ 其中 } m=n,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0,\text{ 其中 } m\neq n,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi\text{ 及 }\int_0^{2\pi}dx=2\pi。$$

假若現在我們先將展開式(2)中的 x 換成 α，再把兩邊乘以 $\cos m\alpha d\alpha$，

然後由 0 到 2π 積分❶，則我們求得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha。\tag{3}$$

同樣，以 $\sin n\alpha\, d\alpha$ 乘兩邊再積分，我們得到：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha。\tag{4}$$

最後，當 $n=0$ 時，我們有：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha \tag{3*}$$

這樣，公式(3*)乃是一般公式(3)的特別情形，只要令(3)中的 $n=0$ 即得(3*)。

通常公式(3)及(4)總寫在一起：

$$\left.\begin{aligned}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha\end{aligned}\right\} n=0,1,2,3,\cdots \tag{5}$$

稱為福里哀公式。於是若三角級數

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+,\cdots \tag{1}$$

中的係數 $a_0\, a_n$ 及 b_n 是按福里哀公式(5)定出的，則該級數(1)稱為函數 $f(x)$ 的福里哀級數，且常用符號寫成：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+ \\ +(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \tag{6}$$

這個式子表明，函數 $f(x)$ 按福里哀公式(5)產生了符號～右邊的三角級數，(5)這個公式則給出了該級的係數。

符號"～"不能寫成通常的等號"="，因為甚至存在連續函數 $f(x)$，其福里哀級數是發散的(只少在一些點處)。僅當係數 a_0, a_n, b_n 使級

❶ 這種逐項積分是許可的，因為所論級數(2)是均勻收斂的。請參閱§79。

數 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ 絕對收斂時,才能把"~"號寫成普通等號"="。但在其餘各情況下,沒有預先研究過,是不能這樣做的,因爲我們並不知道,就已知函數 $f(x)$ 所作的福里哀級數是收斂於它,而不是收斂於別個函數 $\Phi(x)$ 的(要是該級數是收斂的話)。

§141. 預備定理

爲研究福里哀級數,並證明它是收斂於其母函數 $f(x)$的,至少必須就某些類型的函數 $f(x)$,講一些輔助定理。

預備定理 1 假若函數 $f(x)$ 在某個線段 $[a, b]$ 上是連續的,則 n 無限增大時,兩個定積分 $\int_a^b f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$ 及 $\int_a^b f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$ 都趨近於零。

證明 我們只討論第一個積分,因爲第二個積分的證明也是一樣的。我們用 A_n 表示第一個積分

$$A_n=\int_a^b f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha\ 。\tag{1}$$

因爲對於任意的 φ,我們恆有 $\cos(\varphi-\pi)=-\cos\varphi$,故 $\cos n\alpha=-\cos(n\alpha-\pi)$,因此:

$$A_n=-\int_a^b f(\alpha)\cos(n\alpha-\pi)d\alpha=-\int_a^b f(\alpha)\cos n\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)d\alpha\ 。$$

令 $\alpha-\frac{\pi}{n}=\beta$,我們有:$\alpha=\beta+\frac{\pi}{n}$ 及 $d\alpha=d\beta$。由此得

$$A_n=-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(\beta+\frac{\pi}{n}\right)\cos n\beta\, d\beta=$$

$$=-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos n\alpha\, d\alpha,$$

因爲我們可把積分變量 β 寫爲字母 α 的式子。

故與(1)式同時可得

$$A_n=-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos n\alpha\, d\alpha。 \tag{2}$$

將等式(1)及(2)相加,得:

$$2A_n=-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{a} f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos n\alpha\, d\alpha+$$

$$+\int_a^{b-\frac{\pi}{n}}\left[f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cdot\cos n\alpha\, d\alpha+\int_{b-\frac{\pi}{n}}^{b} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha。 \tag{3}$$

因為函數$f(x)$在線段$[a,b]$上是連續的,所以它在$[a,b]$上是有界的,亦即對於$[a,b]$上的所有的點x都有不等式$|f(x)|\leqslant M$。因此,等式(3)右邊兩端的兩個積分的絕對值,都不大於$M\cdot\frac{\pi}{n}$。至於中間的那個積分,其絕對值不大於

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{n}}\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\right|d\alpha。$$

所以我們有不等式

$$|2A_n|\leqslant 2M\cdot\frac{\pi}{n}+\int_a^{b-\frac{\pi}{n}}\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot d\alpha。$$

由於函數$f(x)$是在$[a,b]$上均勻連續的,故對於足夠大的數n,我們有不等式$\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\right|<\varepsilon$,其中$\varepsilon$是任意小的固定正數。因此,對於足夠大的$n$,我們有

$$|2A_n|<2M\frac{\pi}{n}+\varepsilon(b-a) \tag{4}$$

又由於當$n\to+\infty$時$2M\frac{\pi}{n}\to 0$,故由此知

$$\lim_{n=+\infty} A_n=0。$$

同樣,我們可證明上面這個預備定理中的第二個積分B_n:

$$B_n=\int_a^b f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha。$$

當 n 無限增大時，也趨近於零。也就是：我們有：

$$\lim_{n\to+\infty} B_n=0。$$

所證明的預備定理 1，有兩個推論：

推論 1 假若線段 $[a, b]$ 上的曲線 $y=f(x)$，係由有限個連續弧段所組成，則當 n 無限增大時，兩個積分 $\int_a^b f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$ 及 $\int_a^b f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$ 仍然都趨近於零。

事實上，在這種情形，積分 $\int_a^b f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$ 可分為有限個積分 $\int_a^{\xi}+$ $+\int_{\xi}^{\xi'}+\int_{\xi'}^b$ 的和(圖164)，使每個積分中的函數 $f(x)$ 在其兩個積分上下限之間（包括端點）是連續的。因此根據所證明的預備定理 1，每個積分都隨 n 的增大而趨近於零。隨之，當 $n\to+\infty$ 時，它們的和，卽整個積分 $\int_a^b f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$，也趨近於零。

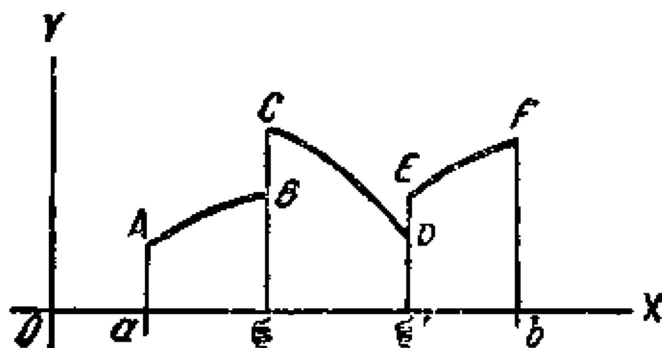


圖 164.

同樣，當 $n\to+\infty$ 時，我們有 $\int_a^b f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\to 0$。

推論 2 假若線段 $[a, b]$ 上的曲線 $y=f(x)$，是有限個連續弧段所組成的，則當 $n\to+\infty$ 時，就 $f(x)$ 所作的福里哀級數的係數 a_n 及 b_n，都趨近於零，也就是我們有：$\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ 及 $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$。

事實上，按 §140 的福里哀公式(5)，我們有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \text{ 及 } b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha。$$

故按預備定理 1，當 $n\to+\infty$ 時，我們有 $a_n\to 0$ 及 $b_n\to 0$。

預備定理 2 對於每一個自然數 n，我們有恆等式：

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}。\qquad (5)$$

證明 我們有恆等式：

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\cdot\cos k\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}。\qquad (6)$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n$。

把這個恆等式改寫爲：

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(\overline{k-1}+\frac{1}{2}\right)\alpha=2\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

並就 $k=1, 2, 3, \cdots, n$ 時把所有恆等式一起加起來，我們求得：

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}=(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha)\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}。$$

由此，將 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 移到右邊來，並以 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 除兩邊，我們就得到恆等式(5)。

§142. 福里哀級數的首 $n+1$ 項和的表達式

設函數 $f(x)$ 在線段 $[0, 2\pi]$ 上，是由有限個連續弧段所表示的（圖165）。

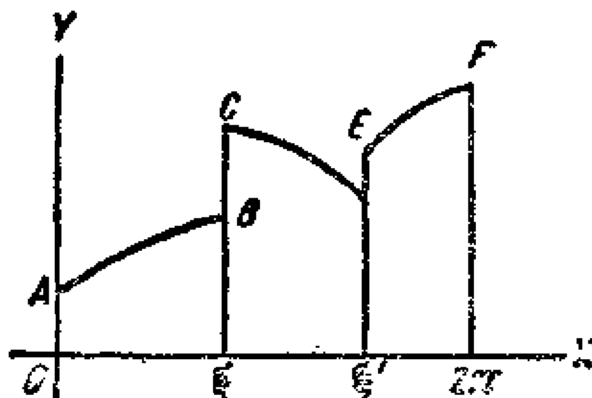


圖 165.

設 $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

爲 $f(x)$ 的福里哀級數。這表示,係數 a_n, b_n 是按福里哀公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \text{ 及 } b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha。\quad (2)$$

算出來的。

我們用 $S_n(x)$ 表示福里哀級數的首 $n+1$ 項之和:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (3)$$

或縮寫爲: $$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)。\quad (4)$$

這個有限和 $S_n(x)$ 的一般項 $a_k\cos kx+b_k\sin kx$, 用福里哀公式來表示其中的係數 a_k 及 b_k 後,取得下面的形式

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)[\cos k\alpha\cos kx+$$
$$+\sin k\alpha\sin kx]d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cdot\cos k(\alpha-x)\cdot d\alpha。\quad (5)$$

因此,整個和 $S_n(x)$ 可寫爲:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\alpha-x)\right]\cdot d\alpha。\quad (6)$$

積分號內方括號中的表達式,當 x 爲定數時,是 α 的週期函數,週期爲 2π。至於函數 $f(\alpha)$, 則它暫時只定義在線段[0, 2π]上。但是我們可以把它定義在整個 OX 軸上,這就是,使它成爲以 2π 爲週期的週期函數。爲此,只要先將 OX 軸分爲長爲 2π 的許多段,由原點 O 向右及向左依次截取這樣的線段,然後在每個這種線段中,複製出基本線段[0, 2π]上所給的圖形(圖 165)。這樣做了之後,函數 $f(x)$ 就定義在整個 OX 軸上了,並且具有週期 2π。這樣,(6)式積分號內的乘積 $f(\alpha)\cdot$ $\cdot$[　]就在整個 OX 軸上都有定義了,而且是週期性的函數,週期爲 2π, 但由於在一個長爲週期的線段上,週期函數的積分顯然是一個常量,不依賴於該線段的位置,故我們可以用長度也是 2π 的線段[$x-\pi$, $x+\pi$]

來代替公式(6)中的積分線段$[0, 2\pi]$。這就使我們得到

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(\alpha)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\alpha-x)\right]d\alpha\text{。}$$

作置換$\alpha-x=\beta$，我們有$\alpha=x+\beta$及$d\alpha=d\beta$。由此得：

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+\beta)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\beta\right]d\beta\text{。}$$

再把積分變量β改寫爲α的形式，並引用前節的預備定理2，我們最後求得：

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha\text{.}\qquad(7)$$

這個積分，表達了所給函數$f(x)$的福里哀級數的首$n+1$項的和稱爲狄利希萊積分。它的用處是使我們能研究福里哀級數的收斂性。爲此，應令n無限增大。有了這個目的，再用較有伸縮性的積分下上限$-\varepsilon$及$+\varepsilon$來代替那硬性的積分下上限$(-\pi)$及$(+\pi)$，就能使狄利希萊積分的研究容易些。

爲證明這樣來簡化積分(7)是合法的，我們注意，函數$f(x)$在基本線段$[0, 2\pi]$上是假定可用有限個連續弧來表示的。因爲分母$2\sin\frac{\alpha}{2}$在線段$[-\pi, -\varepsilon]$及$[+\varepsilon, +\pi]$上($\varepsilon>0$是極小的數)不等於零，故兩個表達式

$$f(x+\alpha)\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\quad\text{及}\quad f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

在線段$[-\pi, -\varepsilon]$及$[+\varepsilon, +\pi]$上，各是可用有限個連續弧段來表示的。

因此，根據前節預備定理1的推論1，我們有四個趨近於零(當$n\to+\infty$)的積分：

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}f(x+\alpha)\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin n\alpha\,d\alpha,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos n\alpha\,d\alpha,$$

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int_{+\varepsilon}^{+\pi}f(x+\alpha)\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin n\alpha\,d\alpha,$$

$$I_4=\frac{1}{\pi}\int_{+\varepsilon}^{+\pi}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos n\alpha\,d\alpha,$$

又因我們有：
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha=I_1+I_2$$

及
$$\frac{1}{\pi}\int_{+\varepsilon}^{+\pi}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha=I_3+I_4,$$

故當 $n\to+\infty$ 時，這兩個積分都趨近於零。

由此可知，$f(x)$ 的福里哀級數的首 $n+1$ 項之和 $S_n(x)$，可以寫為：

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha+\eta_n,\qquad(8)$$

其中的 η_n 當 $n\to\infty$ 時是一個無窮小。

等式(8)右邊的積分，稱為狄利希萊截積分。其中在積分上下限中的數 ε 為正數，可以是任意小，但它是預先選擇好了的（亦即固定的）。

§143. 福里哀級數的收斂

我們只限於討論對實用上重要的情形，即被展開爲福里哀級數的函數 $f(x)$，可表示爲有限個連續弧段，且這些弧在其每一點處都有切線的情形。

這裏，爲使讀者最能清楚了解起見，我們再說一遍，這些個別的弧段，如圖 165 中的 AB、CD、EF 諸弧，在每一點都有確定的切線，甚至於在其端點如 A 及 B，C 及 D，E 及 F 處，也是這樣。

假若 x 是函數 $f(x)$ 的任何弧段上的連續點，則 x 不可能是端點的橫坐標，於是函數 $f(x)$ 在這種點處就具有導數 $f'(x)$，這就是說，當 $\alpha>0$ 或 <0 而趨近於零時，比值

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$$

趨近於一個確定的極限。

假若 ξ 點爲某弧段的端點，則 ξ 是兩個端點（如圖 165 中的 B 及 C 點）的橫坐標。顯然，在這種情形，$f(\xi-0)=$ 線段 ξB，而 $f(\xi+0)=$ 線段 ξC；這線段 ξC 一般說來是不等於線段 ξB 的。因此在這種點 ξ，函數不可能有導數，然而應該有兩個極限：

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi+0)}{\alpha} \text{ 其中 } \alpha>0, \tag{1}$$

及

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi-0)}{\alpha} \text{ 其中 } \alpha<0\text{。} \tag{2}$$

顯然，第一個極限（1），等於 CD 弧在 C 點處的切線斜率；而第二個極限（2），等於 AB 弧在 B 點處的切線斜率。

注意到這點後，我們取函數 $f(x)$ 的福里哀級數：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \tag{3}$$

其首 $n+1$ 項之和 $S_n(x)$，可寫爲：

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha+\eta_n, \qquad (4)$$

其中的 η_n，當 $n\to+\infty$ 時，趨近於零。

第一種情形　在弧的內點 x 處，福里哀級數的收斂問題。

按§141 預備定理 2，我們有：

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}。$$

用 $\frac{1}{\pi}d\alpha$ 來乘，在 0 及 $+\pi$ 之間積分，得：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}。\qquad (5)$$

同樣可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha=\frac{1}{2}。\qquad (6)$$

（5）及（6）中的積分，各可分爲兩部分：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\ \text{及}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon},$$

其中第二部分，當 $n\to+\infty$ 時，都趨近於零（參閱§142）。隨之，我們有：

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha+\eta_n^{*} \qquad (5^*)$$

及

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\varepsilon}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha+\eta_n^{**}, \qquad (6^*)$$

其中當$n\to+\infty$時，$\eta_n^*\to 0$及$\eta_n^{**}\to+0$。

將(5^*)及(6^*)加起來，得：

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha+\eta_n^*+\eta_n^{**}. \qquad (7)$$

以$f(x)$乘等式(7)，我們得到：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha+(\eta_n^*+\eta_n^{**})\cdot f(x). \qquad (8)$$

由等式(4)減去等式(8)，得到：

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\cdot d\alpha+$$
$$+\eta_n-(\eta_n^*+\eta_n^{**})\cdot f(x). \qquad (9)$$

所得到的等式(9)是極其重要的，因爲由這個等式可直接推出：**福里哀級數在函數$f(x)$的每個連續點處，都收斂爲函數$f(x)$。**

事實上，積分號中的**第一個分式**$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$，在$\alpha=0$處是變量$\alpha$的連續函數，因爲，當$d$取任意正負號依任意規律趨近於零時，該分式趨近於一定的極限$f'(x)$。但是，這個分式，同樣在線段$[-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$其它各點$\alpha$處也是連續的，因爲只有當被減數$f(x+\alpha)$間斷時，這個分式才可能是間斷的。爲了使這樣的事不至於發生，我們可以把數ε取得很小，使它小於連續點x到弧的最近的一個端點的距離。在這些條件下，$f(x+d)$在整個線段$[-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$上顯然是連續的。

第二個分式$\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$是線段$[-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$上的連續函數，因爲當$\alpha$依任意規律趨近於零時，它趨近於1，而且它在線段$[-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$其他各點處又是連續的。

因此，對於(9)中的積分可引用§141的預備定理1。隨之，當$n\to+\infty$

時、等式(9)整個右邊是趨近於零的。

這樣，我們乃有等式：

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x), \tag{10}$$

它表示了：福里哀級數，在弧段的每一個內點處，都趨近於函數 $f(x)$。

第二種情形　福里哀級數在弧段端點 ξ 處的收斂問題。

在這種情形，我們把狄利希萊的截積分(4)分為兩半：

$$S_n(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\varepsilon} f(\xi+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0} f(\xi+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\alpha+\eta_n=I_n'+I_n''+\eta_n, \tag{11}$$

其中，我們用 I_n' 表示第一個積分，用 I_n'' 表示第二個積分。

現在我們計算，當 $n\to+\infty$ 時，第一個積分 I_n' 的極限。為此，我們用 $f(\xi+0)$ 乘等式 (6^*)，然後由 I_n' 減去它，得：

$$I_n'-\frac{f(\xi+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\varepsilon}\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi+0)}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\cdot d\alpha-$$

$$-\eta_n^{**}f(\xi+0)。 \tag{12}$$

我們仍然可以說：第一個分式 $\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi+0)}{\alpha}$ 是自變量 α 在線段 $[0\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$ 上的連續函數，因為，第一，它在 $\alpha=0$ 點是右邊連續的，它在這一點的極限等於弧 CD 在 C 點的切線斜率；第二，當 ε 取得比間斷點 ξ 到最近的其他端點的距離小些時，該分式在線段 $[0\leqslant\alpha\leqslant+\varepsilon]$ 的其任何點 α 處都是連續的。

因此，等式(12)右邊的積分，根據§141的預備定理1，當 $n\to+\infty$ 時趨近於零。由此可知：

$$\lim_{n\to+\infty} I_n'=\frac{f(\xi+0)}{2}。 \tag{13}$$

(11)式中第二個積分 I_n'' 的極限的算法也完全相同：用 $f(\xi-0)$ 乘等式(5*)，再從 I_n'' 減去它，得：

$$I_n''-\frac{f(\xi-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi-0)}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\cdot d\alpha-$$
$$-\eta_n^*(\xi-0)。\qquad(14)$$

因為第一個分式 $\frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi-0)}{\alpha}$ 在線段 $[-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 0]$ 上是連續的，故根據 §141 預備定理 1，等式(14)右邊的積分，當 $n\to+\infty$ 時，趨近於零。隨之我們有：

$$\lim_{n\to+\infty} I_n''=\frac{f(\xi-0)}{2}。\qquad(15)$$

鑑於當 $n\to+\infty$ 時，等式(11)中的 $\eta_n\to 0$，故根據公式(13)及(15)，我們最後得到：

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\xi)=\frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}。\qquad(16)$$

這樣，我們得到下述重要定理：

基本定理 假若函數 $f(x)$ 在長為 2π 的線段上，可以用有限個連續且在每點都具有切線的弧段來表示，則這種 $f(x)$ 的福里哀級數，在每一點是收斂的：假若 x 是函數 $f(x)$ 的連續點，則該福里哀級數的和等於 $f(x)$；假若 ξ 是函數 $f(x)$ 的間斷點，則該級數的和等於函數 $f(x)$ 在 ξ 點的左右二極限的算術平均值 $\frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}$。

例 1 證明：三角級數

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx+\cdots$$

處處收斂：在線段 $[0,\ 2\pi]$ 之內其和為 $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$；在端點處，它收斂為零。

解 將所述函數展開為福里哀級數，我們有：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha=\frac{1}{n}。$$

因此，福里哀級數具有上面所寫的形式，故一定在$[0, 2\pi]$之內趨近於 $\frac{1}{2}(\pi-x)$。線段$[0, 2\pi]$的端點是被展開的函數的間斷點，因爲這個函數實際是一個以2π爲週期的週期函數。因此，在$[0, 2\pi]$的端點處，福里哀級數之和應該是左右二極值之和的一半，就是說，應等於零(圖 166)。



圖 166.

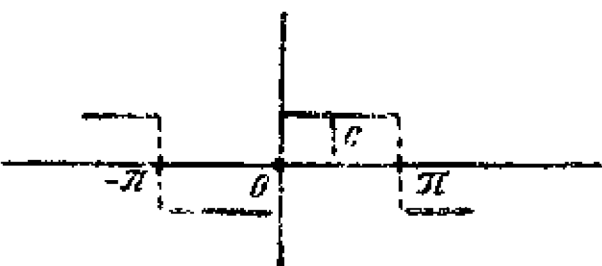


圖 167.

例 2　一函數 $f(x)$ 在$[0, \pi]$之內等於常數 c；在$[-\pi, 0]$之內等於常數 $-c$。試將 $f(x)$ 展開爲三角級數(圖 167)。

解　我們有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-c\cos n\alpha\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}+c\cos n\alpha\,d\alpha=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-c\sin n\alpha\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}+c\sin n\alpha\,d\alpha=\frac{4c}{\pi n}\text{ 若 } n \text{ 爲奇數}$$

$$=0,\text{ 若 } n \text{ 爲偶數}$$

故級數
$$\frac{4c}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\cdots\right)$$

在$(0, \pi)$內具有和 $+c$，而在$(-\pi, 0)$內具有和 $-c$。在這些線段的端點處，級數之和是用左右二極限値的算術平均值來決定的，因爲這些點是該被展開函數的間斷點。

習　題

1　展開如 168 圖所示的連續函數。　　　答　$\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}\cdots\right)$

2．展開如 169 圖所示的連續函數。

答　$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos 2x+\frac{\cos 6x}{3^2}+\frac{\cos 10x}{5^2}+\cdots\right)$。

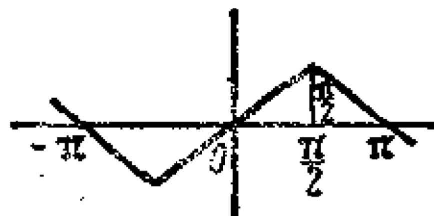


圖 168.

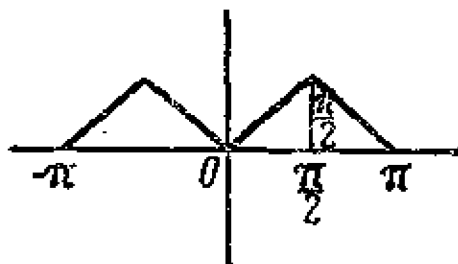


圖 169.

3. 試證明,在[$-\pi$, $+\pi$]內,級數

$$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

之和爲$\frac{x}{2}$。

4. 試證明在[$-\pi$, $+\pi$]上,級數

$$\cos x-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{9}-\frac{\cos 4x}{16}+\cdots$$

表示了$\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$。

5. 證明 在$\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$內,

$$\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}\cdots。$$

6. 證明 在$\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$上

$$\frac{\pi t}{4}=\sin x-\frac{\sin 2x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}\cdots。$$

§144. 諧量分析

對於純週期現象的一般的研究,常稱爲諧量分析。例如,電工中交流電機電壓變化的現象,聲學中的音調,醫學中心的跳動圖線,天文學中變星現象等等,都是這種現象。設有某個隨時間變化的現象$f(x)$,假定它是週期性的,週期爲P,我們常常"分解"這個現象,把它展開爲簡單的週期性"分量"(通常取這種"分量"爲諧量)就是說把它展開爲按正弦及餘弦規律變化的分量:$a_n\cos\frac{2\pi n}{p}t+b_n\sin\frac{2\pi n}{p}t$。這個表達式,稱爲"$n$階諧量"或第$n$個諧量。

當我們想把某個以P爲週期的週期現象$f(t)$展開爲簡單諧量時,我們就寫出等式:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{2\pi}{P}t+b_1\sin\frac{2\pi}{P}t\right)+\cdots+$$

$$+\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{P}t+b_n\sin\frac{2\pi n}{P}t\right)+\cdots \qquad (1)$$

然後按福里哀公式

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{P}\int_0^P f(\alpha)\cos\frac{2\pi}{P}n\alpha\,d\alpha \\ b_n &= \frac{2}{P}\int_0^P f(\alpha)\sin\frac{2\pi}{P}n\alpha\,d\alpha \end{aligned}\right\} n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \qquad (2)$$

來確定那個展開式中的係數 a_n 與 b_n。

這些公式，可以用簡單置換 $x=\frac{2\pi}{P}t$，從上面所給的福里哀公式導得。

要使得計算簡化一點，我們可以照下面的想法來做：在偶函數 $f(t)$ [亦卽以 $-t$ 代 t 時函數值不變的那種函數 $f(t)=f(-t)$] 的情形，福里哀級數中只應該有餘弦項，而不應該有正弦項，因爲正弦項的係數 b_n 這時都等於零。反過來，若 $f(t)$ 是奇函數，亦卽爲 $f(t)=-f(t)$ 的這種函數，則餘弦項都不會有，而只留下正弦項。

上面寫的展開式(1)，在每個長爲週期 P 的線段上都成立。一般多半在線段 $[0,\ P]$ 或 $\left[-\frac{P}{2},\ +\frac{P}{2}\right]$ 上來應用這個展開式。

爲了完全擺脫計算，人們常應用(當可能用時)特別的儀器，所謂諧量分析器，直接用針描一遍實驗得出的週期性曲線 $f(t)$，這種諧量分析器就會給出 $f(t)$ 的福里哀級數中的許多係數。(好的儀器可以給出 45 個諧量)。有時候用的不是機械方法，而是用陰極射線，共振等等方法來做的。

§145. 關於誤差的最小平均二乘方值

還有一個問題，也是歸結於福里哀級數的係數的。設 $f(x)$ 是處處連續的週期函數，週期爲 2π。我們用 $T_n(x)$ 表示任意一個三角多項式：

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots \\ \cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

它到 $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ 項爲止。

假若我們用 $T_n(x)$ 代替函數 $f(x)$ 那麼我們就有了某個誤差。現在要估計這個誤差。爲此，我們寫出積分：

$$I=\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx \qquad (2)$$

並稱之爲誤差的平均二乘方值。

若對於某個三角多項式 $T_n(x)$ 來說，這個誤差很大，那麼用這種 $T_n(x)$ 來作函數 $f(x)$ 的近似表達式就不適宜；也許對於另一些多項式，誤差會小些。現在的問題就是要找出這種三角多項式 $T_n(x)$ 使它所引起的誤差最小。

爲此，要適當的取好係數 $a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$，使積分 I 爲最小。這個積分 I 是 $2n+1$ 個實變量的函數，所以我們應當按多變量函數原理來求它的極小值，也就是我們要寫出方程：

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0, \text{ 及 } \frac{\partial I}{\partial b_k}=0, \qquad (3)$$

這裏 $k=0, 1, 2, \cdots, n$。

顯然我們有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial I}{\partial a_k}=-\int_0^{2\pi}2[f(x)-T_n(x)]\cdot\cos kx\cdot dx\\ \text{及}\quad&\frac{\partial I}{\partial b_k}=-\int_0^{2\pi}2[f(x)-T_n(x)]\cdot\sin kx\cdot dx\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

照着式子算出來：

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha+2\int_0^{2\pi}T_n(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha=$$

$$=-2\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha+2\cdot\pi a_k$$

同樣有 $$\frac{\partial I}{\partial b_k}=-2\int_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha+2\cdot\pi b_k$$

根據等式（3），我們應該有

及
$$\left.\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

而這就是福里哀公式。

因此，在所有的三角多項式 $T_n(x)$ 中，只有一個能使誤差的平均二乘方爲最小，這個三角多項式的係數就是福里哀係數。

第十二章 賈普利金院士的微分方程近似積分法

§146. 賈普利金微分不等式

在所給微分方程 $$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$

中，我們假設右邊的函數 $f(x, y)$ 是 XOY 平面某部分上的連續函數，並在該部分平面上滿足某種條件，以保證（1）的積分是唯一的。比方說，我們就可以假定在該部分平面上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 處處具有有限的數值。在這種假設之下，所論那部份平面(圖 170)的每一點 $M_0(x_0, y_0)$ 處，就一定有條唯一的積分曲線通過。只可惜，這條曲線我們差不多總是不知道的。因此，爲了滿足實用上的需要，我們必須找出另一條曲線，這條曲線既要是已知的，又要通過同一點 $M_0(x_0, y_0)$，還要跟那條未知積分曲線一定足夠接近，使得在實用上我們就可以取這條近似曲線的縱坐標，來代替積分曲線 $y=f(x)$ 的縱坐標。

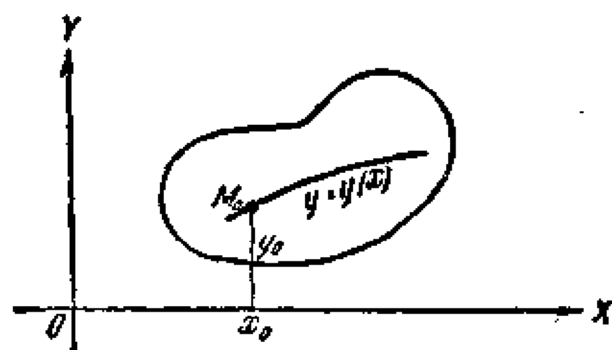


圖 170.

求近似曲線時，賈普利金的一個極妙而簡單的定理，即所謂積分不等式定理，是很有用的。

底下就是這個定理：

若連續曲線 $y=v(x)$ 通過 $M_0(x_0, y_0)$ 點，且在該曲線上微分不等式 $\frac{dv}{dx}-f(x, v)>0$ 處處成立，則當 $x>x_0$ 時，該曲線 $y=v(x)$ 位於那通過同一點 M_0 的積分曲線 $y=y(x)$ 之上。同樣，若在那通過 M_0 點的連續曲線 $y=u(x)$ 上，微分不等式 $\frac{du}{dx}-f(x, u)<0$ 成立，那末這條曲線 $y=u(x)$ 就位於上述積分曲線 $y=f(x)$ 之下。



С. А. 賈普利金

證 明

首先我們知道 $y(x)$ 與 $v(x)$ 兩條曲線都從 M_0 點出發。故 $y_0=y(x_0)=v_0(x)=v_0$，因而

$$f(x_0, v_0)=f(x_0, y_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

微分不等式
$$\frac{dv}{dx}>f(x, v)$$

則告訴我們
$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_0}>f(x_0, v_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

這表明了：曲線 $v(x)$ 在 x_0 點處對水平線的傾斜度，大於曲線 $y(x)$ 的對應傾斜度。由此可知，曲線 $v(x)$ 從始點 M_0 起，開頭無疑是在積分曲線

$y(x)$ 之上的。這個定理的要點在於：曲線 $v(x)$ 一直延伸下去的時候，絕不會跟積分曲線 $y(x)$ 相交，因而往後它必定一直位於積分曲線之上。事實上，要是到後來曲線 $v(x)$ 跟積分曲線 $y(x)$ 相交，那末這些交點之中總有頭一個交點。假設這頭一個交點是 $M_1(x_1, y_1)$。但根據微分不等式，在 M_1 點處跟在早先的 M_0 點處一樣，我們必定有不等式 $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_1} > \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$，這表明曲線 $v(x)$ 在 x_1 點處的傾斜度也比曲線 $y(x)$ 的對應傾斜度大些。但這是不可能的，因為在這種情形下，在 M_1 點左邊，曲線應位於積分曲線之下，而這就表示 M_1 點不是 $v(x)$ 與 $y(x)$ 兩曲線在 M_0 點之後的頭一個交點（圖 171）。

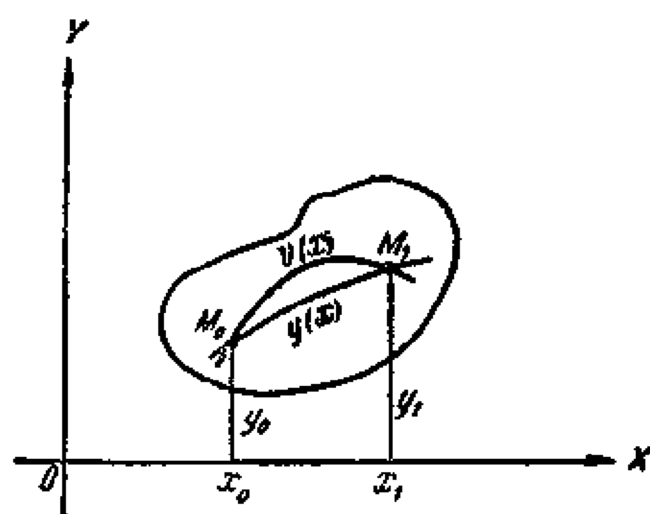


圖 171.

所以，只要微分不等式 $\frac{dv}{dx}-f(x, v)>0$ 一直成立，我們就一定有普通不等式 $v(x)>y(x)$。

同樣，只要微分不等式 $\frac{du}{dx}-f(x, u)<0$ 成立，且曲線 $u(x)$ 通過始點 M_0，我們就必定有普通不等式 $u(x)<y(x)$。

§147. 賈普利金法

給好了一個微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

之後，除了極少有的情形外，通常它都是積不出的。因此，當我們隨便用任意選取的函數 $z(x)$ 代替微分方程（1）中的未知函數 $y(x)$ 時，我們就總得到不等式

$$\frac{dz}{dx}-f(x, z)\gtrless 0 。$$

賈普利金微分不等式之所以重要，在於我們根據微分不等式的不等號，就可以確切斷定所取的曲線 $z(x)$ 是在那未知的積分曲線的哪一邊：如果不等號是 $>$，那末 $z(x)$ 就在 $y(x)$ 之上；如果不等號是 $<$，那末 $z(x)$ 就在 $y(x)$ 之下(圖172)。

如果有了通過始點 M_0 的一對曲線 $[v(x), u(x)]$ 其中第一條曲線滿足不等式

$$\frac{dv}{dx}-f(x, v)>0 \qquad (2)$$

而第二條曲線滿足不等式

$$\frac{du}{dx}-f(x, u)<0 \qquad (3)$$

那我們就知道第一條曲線 $v(x)$ 必定位於第二條曲線 $u(x)$ 之上

圖 172.

(始點 M_0 除外)，而且知道那未知的積分曲線 $y(x)$ 一定要夾在這兩條曲線之間(173)。

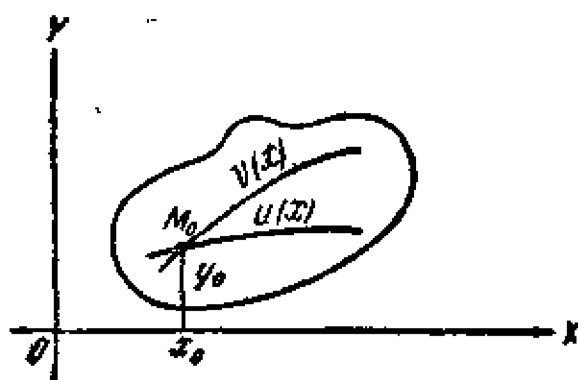


圖 173.

滿足微分方程(2)與(3)的這樣一對曲線叫做頭一對曲線，並縮寫爲 $[u, v]$；它之所以叫頭一對，因爲我們可以根據一定的法則，從這一對起，一對接着一對地導出以後的各對曲線。

$$[u_1, v_1],\ [u_2, v_2],\ [u_3, v_3],\ \cdots,\ [u_n, v_n],\ \cdots \qquad (4)$$

來，使這些對曲線也都滿足微分不等式

$$\frac{du_n}{dx}-f(x, u_n)<0,\ \frac{dv_n}{dx}-f(x, v_n)>0,$$

而且愈來愈緊密地夾住了所求的積分曲線 $y(x)$ (圖 174)。

這樣，所有以後的各對曲線，是不必再化心機去找的，因爲它們都

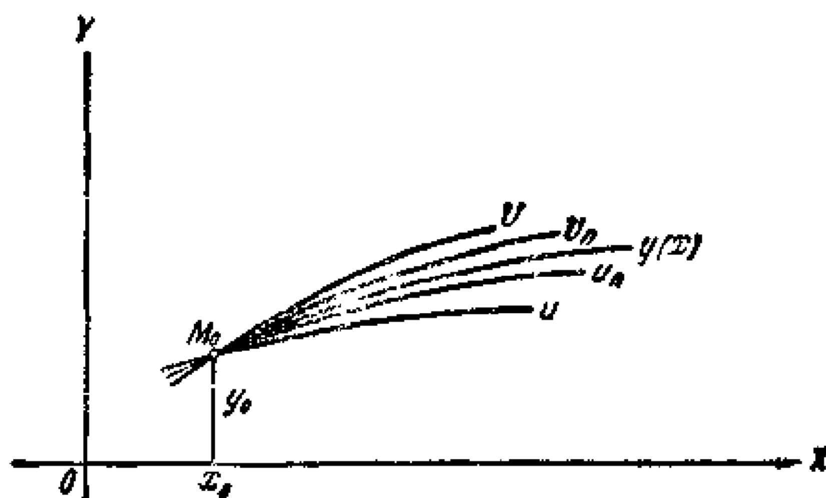


圖 174.

可以按一定的法則求出來。只可惜找頭一對曲線$[u, v]$時,沒有任何法則,所以應當根據某種別方面的考慮,如幾何方面的或代數方面的考慮,來得出這頭一對曲線。

顯然,跟積分曲線 $y(x)$ 本身伸得一樣遠的頭一對曲線$[u, v]$是存在的。這是因爲,對於任何正的 ε, $\varepsilon>0$, 兩個微分方程

$$\frac{dv}{dx}=f(x, v)+\varepsilon \text{ 及 } \frac{du}{dx}=f(x, u)-\varepsilon \tag{5}$$

就分別給出了頭一對曲線$[u, v]$中在上面的曲線 $v(x)$ 與在下面的曲線 $u(x)$,因 $\frac{dv}{dx}-f(x, v)>0$ 而$\frac{du}{dx}-f(x, u)<0$ 。

遺憾的是,(5)中兩個微分方程跟原方程(1)一樣的難積。

這時我們頂好注意下面所講的事:如果能找出兩個連續函數 $f_1(x, y)$ 及 $f_2(x, y)$,把所給連續函數 $f(x, y)$ 夾在中間,也就是,如果

$$f_1(x, y)<f(x, y)<f_2(x, y) \tag{6}$$

而且,如果所找得的這兩個函數 f_1 及 f_2, 能使

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x, y) \text{ 及 } \frac{dy}{dx}=f_2(x, y) \tag{7}$$

這兩個微分方程很容易積得出來,那末,通過始點 $M_0(x_0, y_0)$ 的、它們的積分曲線 $U(x)$ 及 $V(x)$

$$\frac{dU}{dx}=f_1(x, U), \frac{dV}{dx}=f_2(x, V), \tag{8}$$

形成了一對曲線$[U, V]$,從上下兩邊夾住所給微分方程(1)的所求積分曲線$y(x)$。

事實上,從代數不等式(6)及微分方程(8),可得兩個微分不等式

$$\frac{dU}{dx}-f(x, U)<0 \text{ 及 } \frac{dV}{dx}-f(x, V)>0. \tag{9}$$

上面所講作出無窮對曲線(4),把未知的積分曲線$y(x)$愈來愈緊地夾在裏面的賈普利金法,就在於選擇合適的函數$f_1(x, y)$及$f_2(x, y)$,使微分方程(7)是容易積得出來的。為此,賈普利金就採用線性微分方程,即

$$\frac{dy}{dx}=Ay+B, \tag{10}$$

型的微分方程,其中A及B只依賴於x。

§148. 無限近似法

為使作出逐漸夾緊的一對對曲線(4)時可以只限於用線性微分方程(10),賈普利金作了一個合情合理的假定,即假定導數$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$在所論那部分$XOY$平面上是不變號的。在這個假定之下,若用垂直於$OX$軸的平面來割曲面$\zeta=f(x, y)$,則割線或是凹的$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0\text{ 時}\right)$,或是凸的$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0\right)$時。

在圖175及177中所畫的就是這兩種情形。在第一種情形下,$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$是正的;在第二種情形下,$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$是負的。

作好了那滿足微分不等式

$$\frac{du_n}{dx}-f(x, u_n)<0 \text{ 及 } \frac{dv_n}{dx}-f(x, v_n)>0, \tag{11}$$

的第n時曲線$[u_n(x), v_n(x)]$之後,我們就看到:當x及那在範圍$u_n(x)\leqslant y\leqslant v_n(x)$內變動的變量$y$給定時,曲線$\zeta=f(x, y)$的$AB$弧就夾在

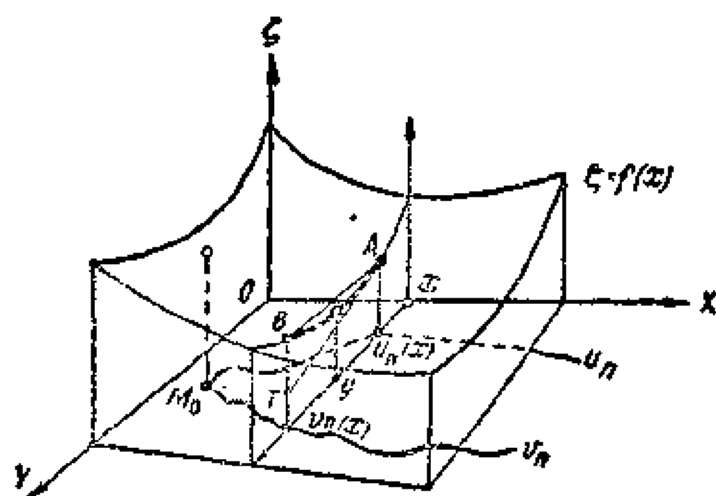


圖 175.

AB 弦及端點 A（或 B）處的切線。AT（或 BT）之間，在圖 176 及 178 中，我們把以前（即在圖 175 及 177 中）所作通過空間 x 點垂直於 OX 軸的剖面，畫在書頁的平面上。從圖 176 及 178，我們一看就明白，當 x 及那在範圍 $u_n(x)\leqslant y\leqslant v_n(x)$ 內變動的變量 y 任意給定時，函數 $\zeta=f(x,y)$ 的數值是夾在字母 y 的兩個線性函數 $L_1(y)$ 及 $L_2(y)$ 之間的，其中

$$L_1(y)=\frac{f(x,v_n)-f(x,u_n)}{v_n-u_n}(y-u_n)+f(x,u_n), \tag{12}$$

及

$$L_2(y)=f'_y(x,u_n)(y-u_n)+f(x,u_n) \tag{13}$$

這是因為 $L_1(y)$ 表示了 AB 弦在點 y 處的縱坐標，而 $L_2(y)$ 則表示了切線 AT 在內一點 y 處的縱坐標。

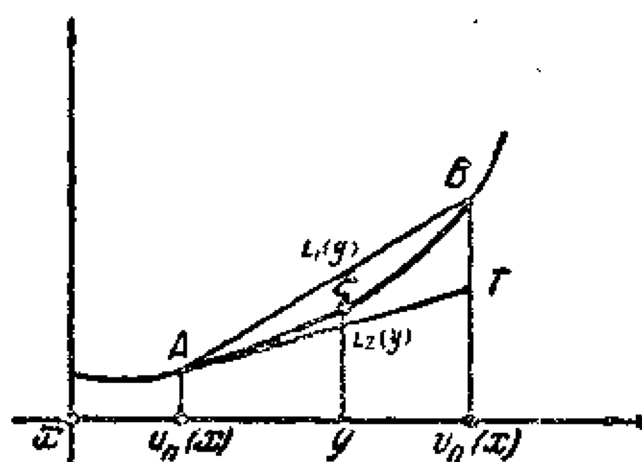


圖 176.

如果切線取在點 B 處，那末函數 $L_2(y)$ 應改為函數

$$L_2^*(y)=f'_y(x,v_n)(y-v_n)+f(x,v_n) \tag{13*}$$

由此可知，若寫出兩個對 y 為線性的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=L_1(y)\ \text{及}\ \frac{dy}{dx}=L_2(y), \tag{14}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=L_1(y)\ \text{及}\ \frac{dy}{dx}=L_2^*(y), \tag{14*}$$

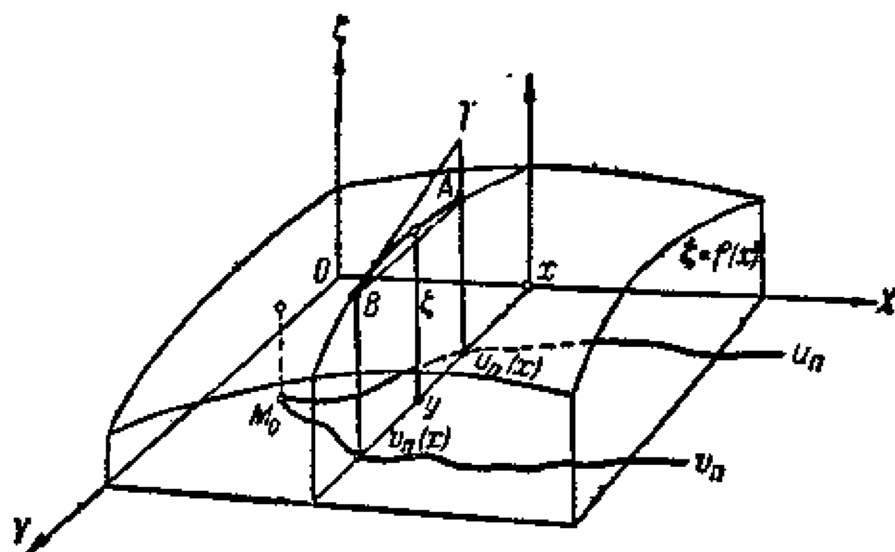


圖 177.

那末微分方程(1)的所求積分曲線 $y(x)$，就會夾在(14)或(14*)中兩個微分方程的、通過始點 $M_0(x_0, y_0)$ 的，積分曲線 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 之間。

故若在 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 這兩條積分曲線中，用 $v_{n+1}(x)$ 表示在上面的那一條，用 $u_{n+1}(x)$ 表示在下面的那一條，我們就得到代數不等式

$$u_{n+1}(x) < y(x) < v_{n+1}(x) \quad (15)$$

這個不等式表明，我們已經作出了次一對曲線 $[u_{n+1}(x), v_{n+1}(x)]$，而且作這一切曲線時，只要積出(14)或(14*)中的兩個線性微分方程；就是說，作這一對曲線的工作，從原則上講沒有任何理論上的困難，因為作的時候只用到不定積分法：我們都知道，積一階線性微分方程時，只要做出不定積分就行。

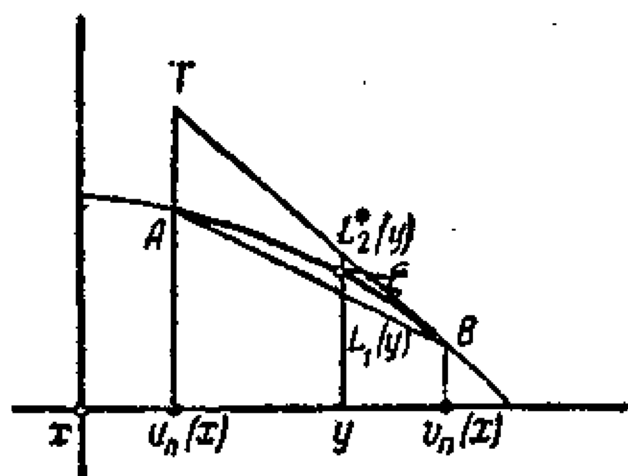


圖 178.

如要證明：這自前一對曲線 $[u_n(x), v_n(x)]$ 剛作出的新的一對曲線 $[u_{n+1}(x), v_{n+1}(x)]$，確實是夾在前一對曲線之內的，我們只要應用賈普

利金的微分不等式定理就行了。

證明時，我們只要分別考察兩種情形：第一，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ 的情形；第二，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$ 的情形。

在第一種情形下，我們從方程(14)來定出 $v_{n+1}(x)$ 及 $u_{n+1}(x)$ 兩個函數。這時的曲線如圖 176 所示。從那個圖上，立刻可以看出 $y_1(x)>$ $>y_2(x)$，故有 $v_{n+1}(x)=y_1(x)$ 及 $u_{n+1}(x)=y_2(x)$。於是有

$$\frac{dv_{n+1}}{dx}-L_1(v_{n+1})=0 \text{ 及 } \frac{du_{n+1}}{dx}-L_2(u_{n+1})=0 \text{ 。}$$

現在，在這兩個等式中，分別用函數 v_n 代替 v_{n+1}，用函數 u_n 代替 u_{n+1} 。於是根據所設不等式(11)，得到微分不等式

$$\frac{dv_n}{dx}-L_1(v_n)=\frac{dv_n}{dx}-f(x,\ v_n)>0,$$

及
$$\frac{du_n}{dx}-L_2(u_n)=\frac{du_n}{dx}-f(x,\ u_n)<0,$$

這就說明 $v_n(x)>v_{n+1}(x)$ 及 $u_n(x)<u_{n+1}(x)$，也就是，表明了所推出的一對曲線$[u_{n+1},\ v_{n+1}]$確實夾在前一對曲線$[u_n,\ v_n]$的中間。

在第二種情形下，我們從方程(14*)來定出函數 $v_{n+1}(x)$ 及 $u_{n+1}(x)$。這時的曲線如圖 177 所示。從圖顯然可以看出 $y_1(x)<y_2(x)$，故：

$$v_{n+1}(x)=y_2(x) \text{ 及 } u_{n+1}(x)=y_1(x)\text{。}$$

於是我們得到：

$$\frac{dv_{n+1}}{dx}-L_2^*(v_{n+1})=0 \text{ 及 } \frac{du_{n+1}}{dx}-L_1(u_{n+1})=0 \text{ 。}$$

現在，這兩個等式中，用函數 $v_n(x)$ 來代 $v_{n+1}(x)$，用函數 $u_n(x)$來代 $u_{n+1}(x)$。得到：

$$\frac{dv_n}{dx}-L_2^*(v_n)=\frac{dv_n}{dx}-f(x,\ v_n),$$

及
$$\frac{du_n}{dx}-L_1(u_n)=\frac{du_n}{dx}-f(x,\ u_n)\text{。}$$

根據不等式(11)，可知上面第一式是正的，第二式是負的。

所以，在這第二種情形下，新作出的一對曲線$[u_{n+1}, v_{n+1}]$也夾在前一對曲線$[u_n, v_n]$的中間。

於是我們證明了：賈普利金所指出的，不斷地列出並積出一階線性微分方程的步驟，可以得出無限多的一對對曲線。

$$[u_1, v_1], [u_2, v_2], [u_3, v_3], \cdots, [u_n, v_n], \cdots$$

這些對曲線都通過始點 $M_0(x_0, y_0)$，其中每一對曲線內都夾住了它以後的所有各對曲線，並且愈來愈緊密地夾住了所求的積分曲線 $y(x)$。

現在還要知道這個步驟的快慢如何，就是說，要知道這樣做下去，向未知的積分曲線收斂得快不快。

§149. 賈普利金法收斂的快慢程度

為了要估計賈普利金法第 n 步的近似度，也就是，為了要估計差 $v_{n+1}(x)-u_{n+1}(x)=\delta_{n+1}(x)$ 的大小，我們應該來看微分方程(14)，因為(14) 中的一個方程給出了位於上方的函數 $v_{n+1}(x)$，而另一個方程則給出了位於下方的函數 $u_{n+1}(x)$。應用拉格蘭日中值定理，把線性函數 $L_1(y)$ 寫成更便於應用的形式[對方程(14*)的討論也跟這相似]：

$$L_1(y)=f'_y(x, z)(y-u_n)+f(x, u_n),$$

其中 z 是在 u_n 及 v_n 之間的一個數，$u_n \leqslant z \leqslant v_n$。但由於 $f'_y(x, z)=$ $=f'_y(x, u_n)+(z-u_n) f''_{y^2}(x, \zeta)$，其中 ζ 是 u_n 及 z 之間的數，因而它也是 u_n 及 v_n 之間的數，$u_n \leqslant \zeta \leqslant v_n$，故得

$$L_1(y)=f'_y(x, u_n)\cdot(y-u_n)+f(x, u_n)+ \\ +f''_{y^2}(x, \zeta)\cdot(z-u_n)(y-u_n)。\qquad (12^*)$$

現在，從(14)中給出 v_{n+1} 的那個微分方程，減去那給出 u_{n+1} 的另一個微分方程，我們顯然就得到

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx}=f'_y(x, u_n)\cdot\delta_{n+1}(x)\pm f''_{y^2}(x, \zeta)\cdot(z-u_n)(y-u_n), \qquad (16)$$

這裏，當我們從(14)的第一個微分方程減去第二個微分方程時，(16)右邊第二項前面取(＋)號；當我們反過來從(14)的第二個方程減去第一個方程時，(16)右邊第二項前面取(－)號。

用 λ 及 μ 來記兩個正數，各比所論那部分 XOY 平面上的絕對值 $|f'_y(x,y)|$ 及 $|f''_{y^2}(x,y)|$ 來得大

$$|f'_y(x,y)|<\lambda,\quad |f''_{y^2}(x,y)|<\mu,$$

並注意：數 y 及 z 在數 u_n 及 v_n 之間，又 $\delta_{n+1}(x)$ 是正的，故從等式(16)可得不等式

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx}<\lambda\delta_{n+1}(x)+\mu\delta_n^2(x),\tag{17}$$

因為我們顯然有

$$|z-u_n|<\delta_n(x)\ \text{及}\ |y-u_n|<\delta_n(x)。$$

如果我們現在不考慮函數 $\delta_{n+1}(x)$ 的微分不等式(17)，而拿某個暫時還不知道，但在 $x=x_0$ 時等於零的函數 $\Delta_{n+1}(x)$，$\Delta_{n+1}(x_0)=0$，來考慮它的線性微分方程

$$\frac{d\Delta_{n+1}(x)}{dx}=\lambda\Delta_{n+1}(x)+\mu\Delta_n^2(x),\tag{18}$$

那末，根據賈普利金的微分不等式定理，便可知在代數不等式

$$\delta_{n+1}(x)<\Delta_{n+1}(x),\tag{19}$$

成立時，必可得代數不等式

$$\delta_n(x)<\Delta_n(x)。\tag{20}$$

為證明這事，只要取一個滿足初始條件 $\omega(x_0)=0$ 的輔助微分方程

$$\frac{d\omega(x)}{dx}-\lambda\omega(x)-\mu\delta_n^2(x)=0\tag{21}$$

就行了。

由於在這個微分方程中，用函數 $\delta_{n+1}(x)$ 置換函數 $\omega(x)$ 的結果，因(17)的關係可得微分不等式

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx}-\lambda\delta_{n+1}(x)-\mu\delta_n^2(x)<0,$$

的緣故，所以應該處處成立代數不等式

$$\delta_{n+1}(x)<\omega(x)。\tag{22}$$

另一方面，在微分方程(21)中，用函數 $\varDelta_{n+1}(x)$ 置換 $\omega(x)$ 後，所得結果是正的，故有

$$\frac{d\varDelta_{n+1}(x)}{dx}-\lambda\varDelta_{n+1}(x)-\mu\delta_n^2(x)=\frac{d\varDelta_{n+1}(x)}{dx}-\lambda\varDelta_{n+1}(x)-\mu\varDelta_n^2(x)+$$
$$+\mu\varDelta_n^2(x)-\mu\delta_n^2(x)=\mu[\varDelta_n^2(x)-\delta_n^2(x)]=\mu[\varDelta_n(x)+\delta_n(x)]\times$$
$$\times[\varDelta_n(x)-\delta_n(x)]>0。$$

所以，我們應有代數不等式

$$\omega(x)<\varDelta_{n+1}(x)。\tag{23}$$

比較不等式(22)及(23)，最後得：

$$\delta_{n+1}(x)<\varDelta_{n+1}(x)。$$

這樣，估計賈普利金法收斂的快慢程度時，只要用初始條件 $\varDelta_{n+1}(x_0)=0$ 定出函數 $\varDelta_{n+1}(x)$，並把它前面的函數 $\varDelta_n(x)$ 當作是已知的，然後把線性方程(18)積出來就行了。積出來(§106)後，得到

$$\varDelta_{n+1}(x)=e^{\lambda x}\int_{x_0}^{x}\mu\varDelta_n^2(t)e^{-\lambda t}dt$$

或

$$\varDelta_{n+1}(x)=\mu\int_{x_0}^{x}e^{\lambda(x-t)}\varDelta_n^2(t)dt。\tag{24}$$

我們假定，所論微分方程(1)的近似積分法，是在預先給好的線段 $[x_0\leqslant x\leqslant x_1]$ 上做的。

所以，這線段的長度是我們的已知常量，用 L 來記，$L>0$，也就是，$x_1-x_0=L$。其他這類正的已知常量是前面所講的常量 λ 及 μ，$\lambda>0$，$\mu>0$。L，λ，μ，這三個常量，是我們的基本常量。

記住了這事之後，為方便計，我們引入三個正的常量 K，C 及 s，這是三個補助的(不是基本的)常量，因為它們可用基本常量來表示。這

就是，我們設：

$$\left.\begin{aligned} K&=\mu e^{\lambda L};\\ C&=\frac{1}{2KL};\\ \varepsilon^2&=\frac{1}{2L}。\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

由於(24)式中的字母 x 及 t 表示線段$[x_0, x_1]$內的數，故差 $x-t$ 既是正數，不會超過線段的長度 L。所以從等式(24)可得不等式

$$\Delta_{n+1}(x)<K\int_{x_0}^{x}\Delta_n^2(t)dt。\tag{26}$$

現在假定，對於任何非負的整數 n 來說，不等式

$$\Delta_n(x)<C[\varepsilon(x-x_0)]^{2^n-1}\tag{27}$$

在線段$[x_0, x_1]$上的任何 x 處都成立。於是就有明顯的不等式

$$\Delta_n^2(t)<C^2[\varepsilon(t-x_0)]^{2^{n+1}-2},$$

這樣就可把不等式(26)改寫爲

$$\Delta_{n+1}(x)<K\int_{x_0}^{x}C^2[\varepsilon(t-x_0)]^{2^{n+1}-2}dt。\tag{28}$$

求出定積分後，不等式(28)右邊變爲

$$\frac{KC^2\varepsilon^{2^{n+1}-2}(x-x_0)^{2^{n+1}-1}}{2^{n+1}-1}=\frac{KC^2[\varepsilon(x-x_0)]^{2^{n+1}-1}}{\varepsilon(2^{n+1}-1)}。$$

由於，根據(25)中的第二及第三式我們顯然有 $KC=\varepsilon$；又由於，對任何 n 來說，數 $2^{n+1}-1$ 總是正整數，故不等式(28)可改寫成簡單的形式

$$\Delta_{n+1}(x)<C[\varepsilon(x-x_0)]^{2^{n+1}-1}。\tag{29}$$

由此可推出重要的結論：

公式(27)，在我們假定它對號碼 n 成立之後，當號碼 n 增加1時，也必定是成立的；因此，對於號碼 n 後面的一切數值，(27)式都成立。

特別是，當我們在線段$[x_0, x_1]$上選取那滿足賈普利金微分不等式

$$\frac{du}{dx}-f(x, u)<0,\ \frac{dv}{dx}-f(x, v)>0,$$

的頭一對函數$[u_n(x), v_n(x)]$時，只要把它們選取得這樣，使它們所給出的頭一個近似度。

$$\delta(x)=\Delta(x)=v(x)-u(x),$$

在整個線段$[x_0, x_1]$上都小於常量C。

$$\delta(x)<C$$

我們就能使那根據賈普利金法得出來的往後的一切近似度，也必定都在該線段上適合不等式

$$\delta_n(x)<\Delta_n(x)<C[s(x-x_0)]^{2^n-1}。\tag{30}$$

爲估計用這個方法時收斂的快慢程度，只要注意：在線段$[x_0, x_1]$上我們有$0\leqslant x-x_0\leqslant L$，又根據公式(25)我們有$s=\frac{1}{2L}$。於是：

$$\delta_n(x)<C\left[\frac{1}{2}\right]^{2^n-1}=\frac{2C}{2^{2^n}}。\tag{31}$$

如果我們把這個收斂速度，跟古典數學分析中所用各種近似方法的收斂速度來比較一下，那末，賈普利金法的驚人的收斂速度就可以顯得很突出了。在古典數學分析中，當近似度爲幾何級數型時，也就是，當近似度的分母中有2^n這種數時，我們就認爲已經達到很好的收斂速度了；如果能夠證明近似度的分母中含有階乘數$n!=1, 2, 3, n$，那就可以認爲這種收斂速度已經是超出了一切要求。但在我們所講的賈普利金法中，近似度的分母是個費馬數2^{2^n}，這數的增大率，甚至拿階乘數$n!$來比也是遠比不上的。所以，就收斂速度之快這方面來說，賈普利金法實在是前無倫比的。

當然，我們還可以得到更快的收斂方法，至少在我們把某個收斂級數中只保留適當地方的一部份項不動，而用零置換所有其他項後，就能得到這種方法。但賈普利金是個幾何學家，是不慣於作些人爲的例子來肯定某種思想的·他所滿足的，通常總是實際研究過程中自然得出的那種方法。